ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 1 Οκτωβρίου 2013

1. Σύμφωνα με τις διαθέσεις της κυβέρνησης, 118 υπάλληλοι του Π.Π. τίθενται σε διαθεσιμότητα. Αν για αυτούς τους υπαλλήλους υπάρχουν τρεις ισοπίθανες περιπτώσεις, είτε να υπηρετήσουν άλλες ακαδημαϊκές μονάδες, είτε να μετατεθούν σε άλλες υπηρεσίες του κράτους, είτε να απολυθούν, τότε

   (α΄) υπολογίστε την πιθανότητα 52 υπάλληλοι να υπηρετήσουν σε άλλη ακαδημαϊκή μονάδα, 40 υπάλληλοι να μετατεθούν σε άλλη υπηρεσία του κράτους και οι υπόλοιποι να απολυθούν.

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα το πολύ 10 να απολυθούν; (15)

2. Μέσα σε ένα δοχείο υπάρχουν 4 μαύρα και 6 άσπρα σφαιρίδια. Ρίχνω 3 νομίσματα ταυτόχρονα, και βγάζουμε τόσα σφαιρίδια από το δοχείο, όσα και το πλήθος των κορώνων από την ρίψη των 3 νομισμάτων.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να βγάλω ένα μαύρο σφαιρίδιο από το δοχείο όταν η δειγματοληψία γίνεται (i) με επανάθεση, (ii) χωρίς επανάθεση.

   (β΄) Αν γνωρίζω ότι έχω βγάλει ένα μαύρο σφαιρίδιο από το δοχείο, ποια είναι η πιθανότητα κατά την ρίψη των τριών νομισμάτων να έχω 2 κορώνες, όταν η δειγματοληψία γίνεται χωρίς επανάθεση; (20)

3. Ο χρόνος που χρειάζεστε για να απαντήσετε σε κάθε ένα από τα θέματα που σας έχουν δοθεί είναι μία εκθετική τ.μ. με μέσο χρόνο απάντησης τα 20 λεπτά.

   (α΄) Υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσετε σε ένα θέμα, σε λιγότερο από 15 λεπτά.

   (β΄) Στη συγκεκριμένη εξέταση έχετε 5 διαφορετικά θέματα, ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσετε σε λιγότερο από 15 λεπτά, σε τουλάχιστον 2 από αυτά.

   (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσετε στο 2ο θέμα σε περισσότερο από 15 λεπτά, ενώ στο 1ο θέμα έχετε δώσει την απάντηση σε λιγότερο από 15 λεπτά.

   (δ΄) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος απάντησης όλων των θεμάτων; (20)

4. Το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) είναι ομοιόμορφο στον χώρο που περικλείεται από τις ευθείες $X - Y = 2$, $X = 0$, $Y = 0$.

   (α΄) Να βρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας του τ.δ. (X, Y).

   (β΄) Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ΄) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ. X και Y.

   (δ΄) Υπολογίστε την $P(X > 1|Y < -1/2)$. (25)

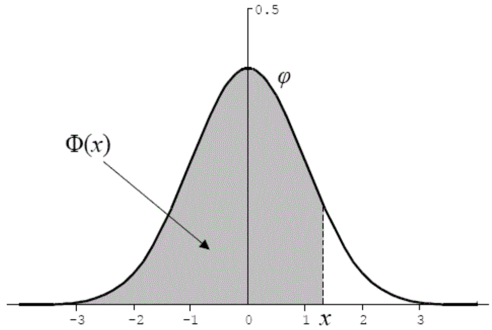
5. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα για έναν νέο επιστήμονα να μεταναστεύσει στο εξωτερικό είναι 1/3.

   (α΄) Ρωτάμε 1800 νέους επιστήμονες αν πρόκειται να μεταναστεύσουν, υπολογίστε την πιθανότητα, μέσω Κ.Ο.Θ., όπως το πολύ 640 από αυτούς να φύγουν για το εξωτερικό.

   (β΄) Ρωτάμε νέους επιστήμονες αν πρόκειται να φύγουν για το εξωτερικό. Ποιο θα είναι το αναμενόμενο πλήθος των ερωτηθέντων, έτσι ώστε η διαδικασία αυτή να σταματήσει όταν φτάσουμε στο 500 οστό άτομο που δηλώνει ότι πρόκειται να φύγει για το εξωτερικό. Χρησιμοποιήστε την 1η ταυτότητα του Wald. (20)

Πίνακας τιμών της σ.κ. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής (*x* = 0, 0.01, 0.02, ..., 3.09)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \ = \ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 1 Οκτωβρίου 2013

1. (α′) Έχουμε ένα πρόβλημα επαναληπτικής δειγματοληψίας, όπου τα σφαιρίδια (οι υπάλληλοι του ΠΠ) είναι διακεκριμένα και τα τοποθετούμε σε 3 κάλπες (οι τρεις περιπτώσεις) με περιορισμό. Επομένως, αν ορίσουμε το γεγονός $A = \{$52 υπάλληλοι υπηρετούν σε άλλη ακαδημαϊκή μονάδα, 40 υπάλληλοι μετατίθονται σε άλλη υπηρεσία του κράτους και 26 απολύονται$\}$, τότε

$$P(A) = \frac{\frac{118!}{52!40!26!}}{3^{118}}.$$

(β′) Αν θεωρήσουμε την τ.μ. X η οποία μετράει το πλήθος των υπαλλήλων που απολύονται, ζητάμε την $P(X \leqslant 10)$, όπου $X \sim B(n,p)$, $n = 118$ και $p = 1/3$.

Επομένως, $P(X \leqslant 10) = \sum_{x=0}^{10} \binom{118}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

2. Ορίζουμε τα γεγονότα,

$A = \{$βγάζω ένα μαύρο σφαιρίδιο από το δοχείο$\}$

$B_0 = \{$0 Κ από την ρίψη των τριών νομισμάτων$\}$

$B_1 = \{$1 Κ από την ρίψη των τριών νομισμάτων$\}$

$B_2 = \{$2 Κ από την ρίψη των τριών νομισμάτων$\}$

$B_3 = \{$3 Κ από την ρίψη των τριών νομισμάτων$\}$.

(α′) Αρχικά χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για να υπολογίσουμε την $P(A)$,
$P(A) = P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$

(i) Στην περίπτωση που η δειγματοληψία γίνεται με επανάθεση έχουμε,

$$P(A) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{\binom{4+1-1}{1}\binom{6+1-1}{1}}{\binom{10+2-1}{2}} \times \frac{1}{4} + \frac{\binom{4+1-1}{1}\binom{6+2-1}{2}}{\binom{10+3-1}{3}} \times \frac{1}{4} = 0.305.$$

(ii) Στην περίπτωση που η δειγματοληψία γίνεται χωρίς επανάθεση έχουμε,

$$P(A) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \times \frac{1}{4} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} \times \frac{1}{4} = 0.358.$$

(β′) Εδώ, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Bayes, δηλ.

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \times \frac{1}{4}}{0.358} = 0.35$$

3. Αν X είναι η τ.μ. που μετράει τον χρόνο απάντησης κάθε ενός από τα θέματα, τότε $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $20 = EX = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$.

(α′) $P(X \geqslant 15) = \int_0 15 \frac{1}{20} e^{-x/20} dx = 1 - e{-}15/20 = p.$

(β′) Αν θεωρήσουμε ως Y να μετράει το πλήθος των θεμάτων με απάντηση σε λιγότερο από 15 λεπτά, τότε

$$Y \sim B(5,p)\ , p = P(X \geqslant 15)$$

Επομένως, $P(Y \geqslant 2) = \sum_{y=2}^{5} \binom{5}{y} p^y (1-p)^{5-y}$.

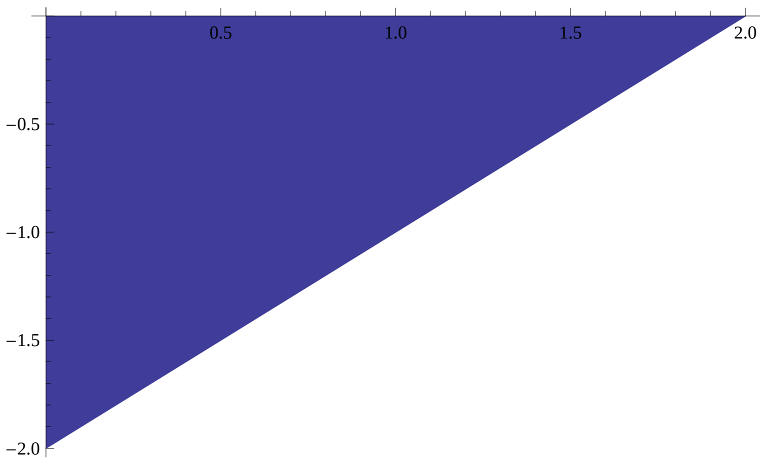
(γ′) Θεωρούμε τα γεγονότα,
$A = \{$απαντώ στο 1ο θέμα σε λιγότερο από 15 λεπτά$\}$ και $B = \{$απαντώ στο 2ο θέμα σε περισσότερο από 15 λεπτά$\}$. Προφανώς τα A και B είναι ανεξάρτητα γεγονότα, κάτι που σημαίνει ότι

$$P(B|A) = P(B) = P(X > 15) = 1 - p = e^{-15/20}.$$

(δ′) Αν X_i είναι η τ.μ. που μετράει τον χρόνο απάντησης του i θέματος, τότε ψάχνω την

$$E(\sum_{i=1}^{5} X_i) = \sum_{i=1}^{5} EX_i = \sum_{i=1}^{5} 20 = 100 \ \text{λεπτά}.$$

4. Το πεδίο τιμών του τ.δ. (X,Y) φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



με εμβαδόν Ε $= \frac{1}{2} \times$ (βάση) $\times$ (ύψος) $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$.

(α′) Οπότε $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ 0 \leqslant x \leqslant y+2 \leqslant 2. \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά}. \end{cases}$

(β′) $f_X(x) = \int f(x,y)dy = \int_{x-2}^{0} \frac{1}{2} dy = \frac{2-x}{2}, \ 0 \leqslant x \leqslant 2.$

$f_Y(y) = \int f(x,y)dx = \int_{0}^{y+2} \frac{1}{2} dx = \frac{y+2}{2}, \ -2 \leqslant y \leqslant 0.$

(γ′) Θέλουμε να υπολογίσουμε την $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.

$\mathbb{E}(XY) = \int_{-2}^{0} \int_{0}^{y+2} xy \frac{1}{2} dx dy = -\frac{1}{3}.$

$\mathbb{E}X = \int x f_X(x) dx = \int_0^2 x \ \frac{2-x}{2} dx = \frac{2}{3}.$

$\mathbb{E}Y = \int y f_Y(y) dy = \int_{-2}^{0} y \ \frac{y+2}{2} dy = -\frac{2}{3}.$

Τελικά $Cov(X,Y) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}.$

(δ′) $P(X > 1|Y < -1/2) = \dfrac{P(X > 1, Y < -1/2)}{P(Y < -1/2)}$, όπου

$P(X > 1|Y < -1/2) = \displaystyle\int_{-1}^{-1/2}\int_{1}^{y+2}\frac{1}{2}dxdy = \frac{1}{16}$

$P(Y < -1/2) = \displaystyle\int_{-2}^{-1/2}\frac{y+2}{2}dy = \frac{9}{16}$.

Τελικά, $P(X > 1|Y < -1/2) = \dfrac{1/16}{9/16} = \dfrac{1}{9}$.

5. (α′) Έστω X_i η τ.μ. που μετράει αν ο i νέος επιστήμονας μεταναστεύει στο εξωτερικό, τότε $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$, $i = 1, 2, \ldots, 1800$, $p = 1/3$, $\mathbb{E}X_i = p = 1/3$, $VarX_i = p(1-p) = 2/9$.

Θέτουμε $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{1800} X_i$, άρα $ES = 1800 \times \dfrac{1}{3} = 600$ και $VarS = 1800 \times \dfrac{2}{9} = 400 = 20^2$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $P(S \leqslant 640)$ και πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

$P(S \leqslant 640) = P\left(\dfrac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \leqslant \dfrac{640 - 600}{\sqrt{400}}\right) = P(Z \leqslant 2)$,

όπου $Z = \dfrac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ.

Επομένως,

$P(S \leqslant 640) = P(Z \leqslant 2) = \Phi(2) = 0.9772$.

(β′) Η 1η ταυτότητα του Wald είναι, $\mathbb{E}(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}N)$,

$N = \min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n = 500\}$. Από την ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι $\mathbb{E}N = 1500$, αφού $\mathbb{E}(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i) = 500$ και $\mathbb{E}X = \dfrac{1}{3}$.

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 26 Φεβρουαρίου 2014

1. Για 80 μετοχές που είναι εισηγμένες στο ΧΑ, παρατηρούμε την τάση που έχει η τιμή τους, σε σχέση με την χθεσινή τιμή κλεισίματος.

   (α′) Υπολογίστε την πιθανότητα, όπως μετά την σημερινή τιμή κλεισίματος, οι 30 από αυτές να έχουν παρουσιάσει άνοδο, οι 40 από αυτές να έχουν παρουσιάσει πτώση και οι υπόλοιπες 10 να έχουν μείνει στα χθεσινά επίπεδα.

   (β′) Αν ισχύει ο καταμερισμός του ερωτήματος (a) και επιλέξουμε 20 από αυτές τις 80 μετοχές, υπολογίστε την πιθανότητα οι 5 (από τις 20) να είναι από αυτές που είχαν την ανοδική τάση. (15)

2. Μετά το δεύτερο μεγάλο σεισμό στο Ληξούρι της Κεφαλλονιάς, το 30% των σπιτιών κρίθηκαν μη κατοικίσημα, οπότε το 40% των κατοίκων, όπου το σπίτι τους κρίθηκε ως μη κατοικίσημο, έφυγαν από το νησί, όπως έφυγαν και το 25% των κατοίκων, όπου το σπίτι τους κρίθηκε ως κατοικίσημο.

   (α′) Υπολογίστε το ποσοστό των κατοίκων του Ληξουρίου που έφυγε από το νησί.

   (β′) Για τον κάτοικο του Ληξουρίου, ο οποίος δεν έφυγε από το νησί, υπολογίστε την πιθανότητα, το σπίτι του να έχει κριθεί ως κατοικίσημο. (15)

3. Η αντίσταση ενός οργάνου, είναι μια κανονική τ.μ. με μέση τιμή 10000 Ohms και τυπική απόκλιση 2000 Ohms.

   (α′) Ποια είναι η πιθανότητα μία τυχαία ημέρα, η αντίσταση ενός οργάνου να κυμανθεί μεταξύ 8000 και 10000 Ohms;

   (β′) Για τις επόμενες 10 ημέρες, ποια είναι η πιθανότητα για τουλάχιστον 3 από αυτές, η αντίσταση του οργάνου να κυμαίνεται μεταξύ 8000 και 10000 Ohms;

   (γ′) Για τις επόμενες ημέρες, ελέγχουμε την αντίσταση του οργάνου, μέχρις ότου αυτή μετρηθεί να μην είναι μεταξύ 8000 και 10000 Ohms. Υπολογίστε την πιθανότητα, όπως την 6η ημέρα, η αντίσταση του οργάνου να μην είναι μεταξύ 8000 και 10000 Ohms. (20)

4. Δίνεται η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X και Y,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx - y & , \quad 0 < y < x < 1. \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   (α′) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

   (β′) Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ′) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ. X και Y.

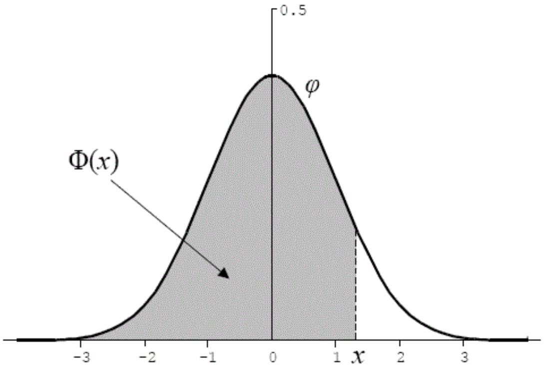
   (δ′) Υπολογίστε την $E(Y^2|X)$. (25)

5. Μια μηχανή αποτελείται από 100 μονάδες οι οποίες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη, υποθέτουμε ότι ο χρόνος ζωής κάθε μονάδας είναι εκθετική τ.μ. με μέση διάρκεια ζωής τις 400 ώρες. Υπολογίστε, μέσω ΚΟΘ, την πιθανότητα όπως ο συνολικός χρόνος ζωής και των 100 μονάδων δεν ξεπερνάει τις 38000 ώρες. (15)

6. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο πανομοιότυπα νομίσματα. Υπολογίστε, μέσω της 1ης ταυτότητας του Wald, το πλήθος των αναμενόμενων ρίψεων αυτών των νομισμάτων, έτσι ώστε να έχουμε σε 20 φορές την ίδια πλευρά και στα δύο νομίσματα. (10)

Πίνακας τιμών της σ.κ. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής (x = 0, 0.01, 0.02, ..., 3.09)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 26 Φεβρουαρίου 2014

1. (α΄) Έχουμε ένα πρόβλημα επαναληπτικής δειγματοληψίας, όπου τα σφαιρίδια (οι μετοχές) είναι διακεκριμένα και τα τοποθετούμε σε 3 κάλπες (διαφορετικές τάσεις) με περιορισμό. Επομένως, αν ορίσουμε το γεγονός $A = \{$οι 30 από τις μετοχές έχουν παρουσιάσει άνοδο, οι 40 από αυτές έχουν παρουσιάσει πτώση και οι υπόλοιπες 10 έχουν μείνει στα χθεσινά επίπεδα.$\}$, τότε

$$P(A) = \frac{\frac{80!}{30!40!10!}}{3^{80}}.$$

(β΄) Σε αυτό το ερώτημα έχουμε ένα πρόβλημα δειγματοληψίας χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς διάταξη και μας ενδιαφέρει να βρούμε την πιθανότητα οι 5 (από τις 20 μετοχές) να έχουν ανοδική τάση. Ορίζουμε το γεγονός $B = \{$ οι 5 (από τις 20 μετοχές) να έχουν ανοδική τάση$\}$, τότε

$$P(B) = \frac{\binom{30}{5}\binom{50}{15}}{\binom{80}{20}}.$$

2. Ορίζουμε τα γεγονότα,

$A = \{$το σπίτι κρίθηκε ως μη κατοικήσιμο$\}$

$B = \{$ο κάτοικος φεύγει από το νησί$\}$

(α΄) Αρχικά χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για να υπολογίσουμε την $P(B)$,
$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.4 \times 0.3 + 0.25 \times 0.7 = 0.295.$

(β΄) Εδώ, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Bayes, δηλ.
$P(A^c|B^c) = \dfrac{P(B^c|A^c)P(A^c)}{P(B^c)} = \dfrac{0.75 \times 0.7}{0.705} = 0.745.$
Προσοχή! $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.295 = 0.705$ και $P(B^c|A^c) = 1 - P(B|A^c) = 1 - 0.25 = 0.75$

3. Αν X είναι η τ.μ. που μετράει την αντίσταση του οργάνου, τότε, σύμφωνα με την άσκηση $X \sim \mathcal{N}(10000, (2000)^2)$.

(α΄) Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα, μία τυχαία ημέρα, η αντίσταση ενός οργάνου να κυμανθεί μεταξύ 8000 και 10000 Ohms, έχουμε
$P(8000 \leqslant X \leqslant 10000) = P\left(\dfrac{8000 - 10000}{2000} \leqslant \dfrac{X - 10000}{2000} \leqslant \dfrac{10000 - 10000}{2000}\right) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 0),$
όπου $Z = \dfrac{X - 10000}{2000} \sim \mathcal{N}(0, 1),$
επομένως,
$P(8000 \leqslant X \leqslant 10000) = P(Z \leqslant 0) - P(Z \leqslant -1) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1)) = 0.5 - (1 - 0.8413) = 0.3413 = p$

(β΄) Αν θεωρήσουμε ως Y την τ.μ. η οποία μετράει το πλήθος των ημερών, όπου η αντίσταση του οργάνου κυμαίνεται μεταξύ 8000 και 10000 Ohms τότε

$$Y \sim B(10, p)\ , p = 0.3413$$

Επομένως, $P(Y \geqslant 3) = \displaystyle\sum_{y=3}^{10} \binom{10}{y} p^y (1-p)^{10-y}.$

(γ′) Θεωρούμε ως W την τ.μ. που μετράει το πλήθος των αποτυχιών (η αντίσταση του οργάνου κυμαίνεται μεταξύ 8000 και 10000 Ohms) μέχρι την πρώτη επιτυχία (η αντίσταση του οργάνου δεν κυμαίνεται μεταξύ 8000 και 10000 Ohms), τότε $W \sim Ge(p')$, $p' = 1 - p = 0.8413$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι,

$$P(W = 5) = p'(1 - p')^5.$$

4. (α′) $\int_0^1 \int_0^x (cx - y)dxdy = 1 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$.

(β′) $f_X(x) = \int f(x, y)dy = \int_0^x (\frac{7}{2}x - y)dy = 3x^2$, $0 < x < 1$.

$f_Y(y) = \int f(x, y)dx = \int_y^1 (\frac{7}{2}x - y)dx = -\frac{3}{4}y^2 - y + \frac{7}{4}$, $0 < y < 1$.

(γ′) Θέλουμε να υπολογίσουμε την $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.

$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^x xy(\frac{7}{2}x - y)dydx = \frac{17}{60}$.

$\mathbb{E}X = \int xf_X(x)dx = \int_0^1 x\, 3x^2dx = \frac{3}{4}$.

$\mathbb{E}Y = \int yf_Y(y)dy = \int_0^1 y\, (-\frac{3}{4}y^2 - y + \frac{7}{4})dy = \frac{17}{48}$.

Τελικά $Cov(X, Y) = \frac{17}{60} - \frac{3}{4}\frac{17}{48} = 0.0177$.

(δ′) $\mathbb{E}(Y^2|X = x) = \int y^2 f_{Y|X}(y|x)dy$, όπου

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{7}{2}x - y}{3x^2}$, $0 < y < x < 1$, οπότε

$\mathbb{E}(Y^2|X = x) = \int_0^x y^2 \frac{\frac{7}{2}x - y}{3x^2}dy = \frac{11}{36}x^2$, $0 < y < x < 1$.

Τελικά, $\mathbb{E}(Y^2|X) = \frac{11}{36}X^2$.

5. Έστω X_i η τ.μ. που μετράει τον χρόνο ζωής κάθε μονάδας, $i = 1, 2, \ldots, 100$,

τότε $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, 100$, $\lambda = \frac{1}{400}$, $\mathbb{E}X_i = 400$, $VarX_i = (400)^2 = 160000$.

Θέτουμε $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, άρα $ES = 100 \times 400 = 40000$ και $VarS = 100 \times 160000 = 16 \times 10^6 = (4000)^2$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $P(S \leqslant 38000)$ και πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

$P(S \leqslant 38000) = P\left(\frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \leqslant \frac{38000 - 40000}{4000}\right) = P(Z \leqslant -0.5)$,

όπου $Z = \frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ.

Επομένως,

$P(S \leqslant 38000) = P(Z \leqslant -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$.

6. Η 1η ταυτότητα του Wald είναι, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}N)$,

   $N = \min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n = 20\}$, όπου

   X_i : μετράει αν έχω την ίδια πλευρά και στα δύο νομίσματα, $X_i \sim \mathcal{B}(1, 2/3)$, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = 20$, οπότε από την ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι $\mathbb{E}N = 30$ ρίψεις.
   Προσοχή! Τα νομίσματα τα ρίχνω ταυτόχρονα, οπότε ο δειγματοχώρος μου είναι {ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ }.