ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 15 Σεπτεμβρίου 2010

1. Θεωρούμε τρία δοχεία U_1, U_2 και U_3 όπου καθ' ένα από αυτά περιέχει 5 μαύρα και 5 άσπρα σφαιρίδια. Ανασύρουμε ένα σφαιρίδιο από το U_1 και το τοποθετούμε στο U_2, στη συνέχεια ανασύρουμε δύο σφαιρίδια από το U_2 και το τοποθετούμε στο U_3. Τέλος ανασύρουμε τρία σφαιρίδια από το U_3.

   (α') Ποια είναι η πιθανότητα τα 2 να είναι μαύρα και το 1 άσπρο;

   (β') Υπολογίστε την ίδια πιθανότητα όταν είναι γνωστό ότι το άσπρο προέρχεται από το U_1. (15)

2. Σε ένα μικρό εμπορικό κέντρο υπάρχουν 5 καταστήματα $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)$. Αν είναι γνωστό ότι την επόμενη ώρα πρόκειται να επισκεφτούν το εμπορικό αυτό κέντρο 80 άτομα,

   (α') ποια είναι η πιθανότητα 16 άτομα να επισκεφτούν το K_1, 12 το K_2, 20 το K_3, 15 το K_4 και 17 το K_5;

   (β') Αν η επισκεψιμότητα των 5 καταστημάτων είναι αυτή που αναφέρεται στο Ερώτημα (α') και ρωτήσουμε 20 από τα 80 άτομα ποιο κατάστημα έχουν επισκεφτεί, ποια είναι η πιθανότητα 5 (από τα 20) να έχουν επισκεφτεί το K_4; (10)

3. Σε ένα δείγμα 60 φοιτητών, η πιθανότητα ένας φοιτητής να αντιγράψει είναι 25% όταν στην αίθουσα υπάρχει ένας επιτηρητής, 15% να αντιγράψει όταν στην αίθουσα υπάρχουν δύο επιτηρητές, ενώ το ποσοστό πέφτει στο 10% όταν στην αίθουσα υπάρχουν 3 επιτηρητές. Αν η πιθανότητα να υπάρχει στην αίθουσα ένας επιτηρητής είναι 10%, δύο επιτηρητές 60%, ενώ η πιθανότητα να υπάρχουν 3 επιτηρητές είναι 30%,

   (α') ποια είναι η πιθανότητα να αντιγράψει ο φοιτητής;

   (β') Ποια είναι η πιθανότητα να αντιγράψουν 5 φοιτητές;

   (γ') Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των φοιτητών που αντέγραψαν;

   (δ') Αν στην αίθουσα υπάρχουν δύο επιτηρητές, ποια είναι η πιθανότητα μόνο ο 60ος φοιτητής να έχει αντιγράψει; (20)

4. Δίνεται η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X και Y,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(1-y) & , \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   (α') Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

   (β') Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ') Υπολογίστε την καμπύλη παλινδρόμισης $E(X|Y)$.

   (δ') Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. X και Y. Ποια είναι τα συμπεράσματά σας; (30)

5. Ρωτήσαμε 1800 άτομα να επιλέξουν μία από τις παρακάτω ευρωπαϊκές πρωτεύουσες, Λονδίνο, Παρίσι ή Ρώμη. Υπολογίστε, μέσω ΚΟΘ, την πιθανότητα όπως τουλάχιστον 635 άτομα επιλέξουν το Παρίσι. (15)

6. Αν θεωρήσουμε ως $X(t)$ τον αριθμό των αναχωρήσεων των αεροπλανων από το αεροδρόμιο "Ελ. Βενιζέλος" στο χρονικό διάστημα $(0,t)$ και ως Y_n το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μέσα στο αεροδρόμιο "Ελ. Βενιζέλος" κατά την αναχώρηση του $n-$οστού αεροπλάνου $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, τότε κατατάξτε τις παραπάνω στοχαστικές διαδικασίες ως προς το χρόνο αλλά και ως προς το χώρο καταστάσεων. (10)

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 15 Σεπτεμβρίου 2010

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Θεωρούμε τα γεγονότα
$M_i = \{$ ανασύρω μαύρο από το $U_i\}$ και $A_i = \{$ ανασύρω άσπρο από το $U_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

(α′) $$P(A_3 \cap 2M_3) = P(A_3 \cap 2M_3|2A_2)P(2A_2) + P(A_3 \cap 2M_3|A_2 \cap M_2)P(A_2 \cap M_2) + P(A_3 \cap 2M_3|2M_2)P(2M_2) =$$
$$= P(A_3 \cap 2M_3|2A_2)\left(P(2A_2|A_1)P(A_1) + P(2A_2|M_1)P(M_1)\right) +$$
$$+ P(A_3 \cap 2M_3|A_2 \cap M_2)\left(P(A_2 \cap M_2|A_1)P(A_1) + P(A_2 \cap M_2|M_1)P(M_1)\right) +$$
$$+ P(A_3 \cap 2M_3|2M_2)\left(P(2M_2|A_1)P(A_1) + P(2M_2|M_1)P(M_1)\right) =$$
$$= \frac{\binom{7}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}\left[\frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2}\right] +$$
$$+ \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{2}}{\binom{12}{3}}\left[\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2} + \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2}\right] +$$
$$+ \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2}}{\binom{12}{3}}\left[\frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}\frac{1}{2}\right].$$

(β′) Αυτό που πρέπει να γίνει σαφές σε αυτό το υποερώτημα είναι ότι από το U_1 θα βγάλω αναγκαστικά ένα άσπρο σφαιρίδιο και από το U_2 τουλάχιστον ένα άσπρο, για να έχω στο U_3 το σφαιρίδιο από το U_1. Επομένως το πρόβλημα μπορεί να ξεκινήσει από το U_2 το οποίο πλέον περιέχει 6 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια, βγάζω 2 άσπρα ή ένα μαύρο και ένα άσπρο και στη συνέχεια βγάζω τα 3 σφαιρίδια από το U_3, δηλαδή,
$$P(A_3 \cap 2M_3) = P(A_3 \cap 2M_3|2A_2)P(2A_2) + P(A_3 \cap 2M_3|A_2 \cap M_2)P(A_2 \cap M_2) =$$
$$= \frac{\binom{7}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}\frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{2}}{\binom{12}{3}}\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}}$$

2. (α′) Αν θεωρήσουμε το γεγονός
$$A = \{16 \text{ άτομα επισκέπτονται το } K_1\,, 12 \text{ το } K_2\,, 20 \text{ το } K_3\,, 15 \text{ το } K_4 \text{ και } 17 \text{ το } K_5\}\,,$$
τότε το αντίστοιχο πρόβλημα στη συνδυαστική ανάλυση είναι σαν να θέλουμε να τοποθετήσουμε 80 σφαιρίδια σε 5 κάλπες με ένα συγκεκριμένο περιορισμό.
$$P(A) = \frac{\frac{80!}{16!12!20!15!17!}}{5^{80}}.$$

(β') Εδώ έχουμε ένα υπεργεωμετρικό πρόβλημα, διότι γνωρίζουμε ότι 15 άτομα επισκέπτονται το K_4 και 65 επισκέπονται τα εναπομείναντα τέσσερα καταστήματα. Δηλαδή έχουμε $m = 15$ μαύρα σφαιρίδια και $n = 65$ άσπρα σφαιρίδια, παίρνουμε $r = 20$ σφαιρίδια (άτομα) και ζητείται η πιθανότητα από τα 20 σφαιρίδια τα 5 να είναι μαύρα (5 επισκέπτονται το κατάστημα K_4).

Τελικά θεωρούμε $X \sim H(x; n, m, r)$ και $P(X=5) = \dfrac{\binom{15}{5}\binom{65}{15}}{\binom{80}{20}}$.

3. (α') Θεωρούμε τα γεγονότα,
$A = \{$ ο φοιτητής αντιγράφει$\}$ και $E_i = \{$ υπάρχουν i επιτηρητές στην αίθουσα $\}$, $i = 1, 2, 3$.
$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3) = \frac{25}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{30}{100} = 0.145.$

(β') Ένας φοιτητής ή θα αντιγράψει ή δεν θα αντιγράψει, επομένως αν ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή X να μετράει το πλήθος των φοιτητών που αντιγράφουν, τότε $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, όπου $n = 60$ και $p = 0.145$.
$P(X=5) = \binom{60}{5} p^5 (1-p)^{60-5}$.

(γ') $EX = np = 60 \times 0.145 = 8.7$. → αναμενόμενο πλήθος = μέση τιμή

(δ') Έστω Y μετράει το πλήθος των αποτυχιών (ο φοιτητής δεν έχει αντιγράψει) μέχρι την 1η επιτυχία (ο φοιτητής έχει αντιγράψει), τότε
$Y \sim Ge(p')$, όπου $p' = 0.15$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(Z = 59) = p'(1-p')^{59}$.

4. (α') $\int_0^1 \int_0^y cx(1-y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c = 24$.

(β') $f_X(x) = \int_x^1 24x(1-y)\,dy = 12x(1-x)^2,\ 0 < x < 1$.

$f_Y(y) = \int_0^y 24x(1-y)\,dx = 12y^2(1-y),\ 0 < y < 1$.

(γ') $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{24x(1-y)}{12y^2(1-y)} = \frac{2x}{y^2},\ 0 < x < y < 1$

Επομένως, $\boxed{\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_0^y x\,\frac{2x}{y^2}\,dx} = \frac{2}{3}y,\ 0 < x < y < 1$.

Δηλαδή η καμπύλη παλινδρόμισης είναι η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{2}{3}Y$.

(δ') $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX\ VarY}}$.
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.
$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy24x(1-y)\,dx\,dy = \frac{4}{15}$.
$\mathbb{E}X = \int_0^1 x\ 12x(1-x)^2\,dx = \frac{2}{5}$.
$\mathbb{E}Y = \int_0^1 y\ 12y^2(1-y)\,dy = \frac{3}{5}$.
Δηλαδή $Cov(X,Y) = \frac{4}{15} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{75}$
$VarX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
αφού, $\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 x^2\ 12x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{5}$.

$$VarY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

αφού, $\mathbb{E}Y^2 = \int_0^1 y^2\, 12y^2(1-y)dy = \frac{2}{5}$.

Τελικά $\rho = \dfrac{\frac{2}{75}}{\sqrt{\frac{1}{25} \times \frac{1}{25}}} = \frac{2}{3}$.

Αυτό σημαίνει ότι οι δύο μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες, δηλαδή όταν οι τιμές της μίας μεταβλητής αυξάνονται (ή μειώνονται) αντίστοιχα αυξάνονται (ή μειώνονται) οι τιμές της άλλης γραμμικά.

5. Θεωρούμε τις τ.μ. $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ το άτομο } i \text{ επιλέγει το Παρίσι} \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} \end{cases}$, $i = 1, \ldots, 1800$.

   Τότε $\forall i,\ X_i \sim \mathcal{B}(1,p),\ p = \frac{1}{3}$, οπότε $S = \sum_{i=1}^{1800} X_i \sim \mathcal{B}(1800, p)$.

   $\mathbb{E}S = np = 1800 \times \frac{1}{3} = 600$ και $VarS = np(1-p) = 1800 \times \frac{1}{3}\frac{2}{3} = 400$.

   Θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την πιθανότητα $P(S \geqslant 635)$.

   Χρησιμοποιούμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, δηλ. ότι $Z = \dfrac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   Επομένως, $P(S \geqslant 635) = P\left(\frac{S-600}{20} \geqslant \frac{635-600}{20}\right) = P(Z \geqslant 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - P(Z \leqslant 1.75) = 1 - \Phi(1.75) = 1 - 0.96 = 0.04$.

6. $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο με διακοιτό νώοο καταστάσεων (μετράει τον αριθμό των αναχωρήσεων).

   $\{Y_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων (μετράει το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μέσα στο αεροδρόμιο).

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010 (ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ)
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 9 Φεβρουαρίου 2010

1. (α΄) Θεωρούμε τα σύνολα,

   A = {επιλέγουμε 4 σύμφωνα και 3 φωνήεντα}

   B = {επιλέγουμε 2 δίχρονα φωνήεντα}

   $$P(A) = \frac{\binom{17}{4} \times \binom{7}{3}}{\binom{24}{7}}.$$

   (β΄) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\dfrac{\binom{17}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{24}{7}}}{\dfrac{\binom{17}{4} \times \binom{7}{3}}{\binom{24}{7}}} = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}}$$

2. $A = \{$ο μετανάστης εργάζεται$\}$

   $B = \{$ο μετανάστης προέρχεται από την Ε.Ε.$\}$

   (α΄) $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.7 \times \frac{1}{6} + 0.4 \times \frac{5}{6} = 0.45$

   (β΄) $P(B^c|A^c) = \dfrac{P(A^c|B^c)P(B^c)}{P(A^c)} = \dfrac{0.6 \times \frac{5}{6}}{0.55} = 0.9$

3. Παρατηρήστε ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται για κάθε διαφορετικό χρώμα στήλου, οπότε αν βρούμε το αναμενόμενο κέρδος σε ένα χρώμα, τότε πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε και το συνολικό αναμενόμενο κέρδος.

   X_K : μετράει το κέρδος από τους στήλους που έχουν χρώμα κόκκινο.

   X_M : μετράει το κέρδος από τους στήλους που έχουν χρώμα μαύρο.

   X_L : μετράει το κέρδος από τους στήλους που έχουν χρώμα λευκό.

   X : μετράει το συνολικό κέρδος.

   Τότε,

   $EX = EX_K + EX_M + EX_L = 3EX_K$, αφού $EX_K = EX_M = EX_L$.

   Οπότε μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με τον κόκκινο στήλο. Ορίζουμε τα σύνολα,

   $K_1 = \{$ο παίκτης πετυχαίνει το τενεκεδάκι στον 1ο κόκκινο στήλο$\}$

   $K_2 = \{$ο παίκτης πετυχαίνει το τενεκεδάκι στον 2ο κόκκινο στήλο$\}$

   Τα δυνατά κέρδη του παίκτη (στον κόκκινο στήλο) είναι $\{-1, -3, 4\}$.

$P(X_K=-1)=P(K_1\cap K_2^c)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$P(X_K=-3)=P(K_1^c)=\frac{1}{4}$

$P(X_K=4)=P(K_1\cap K_2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

Επομένως, $EX_K=(-1)P(X_K=-1)+(-3)P(X_K=-3)+4P(X_K=4)=$

$$(-1)\times\frac{3}{16}+(-3)\times\frac{1}{4}+4\times\frac{9}{16}=\frac{21}{16}.$$

Γελικά το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη θα είναι, $EX=3EX_K=3\times\frac{21}{16}=3.9375$

4. Ορίζουμε την τ.μ. X η οποία μετράει το χρόνο συναρμολόγησης (σε λεπτά) ενός υπολογιστή.
$X\sim\mathcal{N}(50,10^2)\Rightarrow Z=\frac{X-50}{10}\sim\mathcal{N}(0,1)$.

   (α′) $P(X\leqslant 60)=P\left(\frac{X-50}{10}\leqslant\frac{60-50}{10}\right)=P(Z\leqslant 1)=\Phi(1)=0.8413$

   (β′) Y : μετράει το πλήθος των υπολογιστών, που συναρμολογούνται σε λιγότερο από μια ώρα.
   $Y\sim B(50,p)$, $p=0.8413$ $P(Y=20)=\binom{50}{20}p^{20}(1-p)^{50-20}$.

   (γ′) T : μετράει το πλήθος των υπολογιστών που συναρμολογούνται σε λιγότερο από μια ώρα, από το δείγμα των 70 υπολογιστών, $T\sim H(x;n,m,r)$, $n=40, m=80, r=70$

   $$P(T=40)=\frac{\binom{80}{40}\times\binom{40}{30}}{\binom{120}{70}}.$$

5. (α′) $\int_0^1\int_0^y c(y-x)dxdy=1\Rightarrow c=6.$

   (β′) $f_X(x)=\int_x^1 6(y-x)dy=3(x-1)^2,\ 0<x<1.$

   $f_Y(y)=\int_0^y 6(y-x)dx=3y^2,\ 0<y<1.$

   (γ′) $Cov(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)$

   $EX=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1 x3(x-1)^2dx=\frac{1}{4}$

   $EY=\int_0^1 yf_Y(y)dy=\int_0^1 y3y^2dy=\frac{3}{4}$

   $E(XY)=\int_0^1\int_0^y xyf_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y xy6(y-x)dxdy=\frac{1}{5}$

   $Cov(X,Y)=\frac{1}{80}.$

   (δ′) $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6(y-x)}{3y^2},\ 0<x<y<1.$

   $E(X|Y=1)=\int xf_{X|Y}(x|1)dx=\int_0^1 x2(1-x)dx=\frac{1}{3}.$

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2010

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 22 Ιουνίου 2010

1. Ένα δοχείο περιέχει 2 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε κατά τύχη μία - μία μπάλα χωρίς επανάθεση, εώς ότου να μείνουν μπάλες του ίδιου χρώματος στο δοχείο. Ποια είναι η πιθανότητα να μεινουν στο δοχειο μόνο άσπρες μπάλες; (15)

2. Σύμφωνα με τους ειδικούς, τα τρία φαβορί για την κατάκτηση του Παγκοσμίου κυπέλλου στα γήπεδα της Ν. Αφρικής είναι οι Βραζιλία, Αργεντινή και Ισπανία. Αν υποθέσουμε ότι η Βραζιλία έχει πιθανότητα 30% να κερδίσει το Μουντιάλ, ενώ οι άλλες δύο απο 25% (το υπόλοιπο 20% είναι η πιθανότητα κατάκτησης του κυπέλλου από κάποια από τις υπόλοιπες 29 χώρες που μετέχουν στο τουρνουά.), τότε σε περίπτωση νίκης της Βραζιλίας στον τελικό της 11ης Ιουλίου υπολογίζεται ότι η πιθανότητα να αυξηθεί η κατανάλωση μπύρας, ανά τον κόσμο, είναι 35%, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά θα είναι για την μεν Αργεντινή 40% η πιθανότητα αύξησης στην κατανάλωση μπύρας, ενώ αν πάρει το κύπελλο η Ισπανία, το ποσοστό αυτό θα είναι 20%. Επιπλέον, αν κατακτήσει το τουρνουά οποιαδήποτε άλλη χώρα υπολογίζεται ότι η πιθανότητα να αυξηθεί η κατανάλωση μπύρας θα είναι 45%.

   (α΄) Μετά το σφύριγμα της λήξης του τελικού, ποια είναι η πιθανότητα να αυξηθεί η κατανάλωση της μπύρας;
   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να κατακτήσει το Μουντιάλ είτε η Αργεντινή είτε η Ισπανία όταν είναι γνωστό ότι η κατανάλωση μπύρας δεν θα αυξηθεί; (Θεωρείστε ότι είναι ανεξάρτητο το ποια από τις Αργεντινή ή Ισπανία θα κερδίσει το κύπελλο) (20)

3. Ο χρόνος που χρειάζεται για να δοθούν οι απαντήσεις σε όλα τα θέματα που έχετε μπροστά σας είναι μια κανονική κατανομή, με μέση τιμή 100 λεπτά και τυπική απόκλιση 10 λεπτά.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να δώσει απαντήσεις σε αυτά τα θέματα σε λιγότερο από 90 λεπτά;
   (β΄) Αν θεωρησουμε ότι 40 φοιτητές δίνουν απάντηση σε όλα τα θέματα, ποια είναι η πιθανότητα 25 από αυτούς να τελειώσουν σε περισσότερα από 90 λεπτά; Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των φοιτητών που δίνουν απάντηση σε όλα τα θέματα σε περισσότερα από 90 λεπτά;
   (γ΄) Αν είναι γνωστό ότι από τους 70 φοιτητές, οι 40 δίνουν απάντηση σε όλα τα θέματα και επιλέξουμε 25 φοιτητές (από τους 70), υπολογίστε την πιθανότητα οι 10 από τους 25 που επιλέξαμε να έχουν δώσει απάντηση σε όλα τα θέματα. (20)

4. Θεωρούμε τις τ.μ. X και Y και έστω x, y οι τιμές τους αντίστοιχα, όπου $x, y \in \{-1, 0, 1\}$ με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας που δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/8	1/16	1/8
0	1/8	1/16	1/16
1	1/4	1/8	1/16

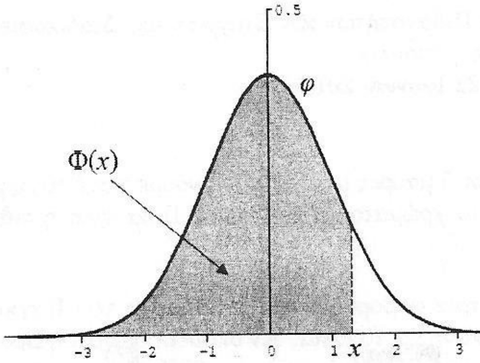
   (α΄) Να υπολογιστούν οι περιθώρειες π.π. των τ.μ. X και Y.
   (β΄) Να υπολογιστεί η $\mathbb{E}(Y|X=0)$.
   (γ΄) Να υπολογιστεί η συνδιασπορά των τ.μ. X και Y. (20)

5. Υποθέτουμε ότι ο μέσος όρος των κλήσεων που φτάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο του ΟΤΕ της Αθήνας σε 1 ώρα είναι 1500, αντίστοιχα σε αυτό της Θεσσαλονίκης 800, ενώ σε αυτό της Πάτρας 200 τηλεφωνικές κλήσεις την ώρα. Υπολογίστε, μέσω ΚΟΘ, την πιθανότητα, μέσα σε 1 ώρα, να φτάσουν και στα τρία προαναφερθέντα τηλεφωνικά κέντρα τουλάχιστον 2580 τηλεφωνικές κλήσεις. (15)

6. Υποθέτουμε ότι μια κάλπη περιέχει 5 μαύρα και 10 λευκά σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο και αφού δούμε το χρώμα του, το βάζουμε πάλι μέσα στην κάλπη. Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος δειγματοληψιών, έτσι ώστε η διαδικασία να σταματήσει όταν έχουμε βγάλει 4 λευκά σφαιρίδια; (10)

Πίνακας τιμών της σ.κ. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής ($x = 0, 0.01, 0.02, ..., 3.09$)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 22 Ιουνίου 2010

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε δειγματοληψία με διάταξη (η μπάλα βγαίνει μία-μία) και χωρίς επανάθεση. Θεωρούμε τα γεγονότα

A_k= {μένουν k άσπρες μπάλες με την προϋπόθεση ότι η τελευταία που πήραμε ήταν μαύρη.}, $k = 1, 2$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συνόλου $A = A_1 \cup A_2$, δηλ. την ποσότητα

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2).$$

Για το γεγονός A_2 βγάζουμε 5 μπάλες από τις 7 και θέλουμε όλες να είναι μαύρες, οπότε,

$$P(A_2) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{5!}{(7)_5} = \frac{1}{21}$$

Για το γεγονός A_1 μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Βγάζουμε 6 μπάλες από τις 7 και θέλουμε μία από τις πρώτες 5 να είναι λευκή και η 6η να είναι μαύρη. Έστω ΜΜΜΜΛΜ μία ευνοϊκή εξάδα. Οι πρώτες 4 μαύρες μπάλες επιλέγονται με $\binom{5}{4}$ τρόπους και η άσπρη με $\binom{2}{1}$ τρόπους, ενώ η τελευταία μαύρη με 1 τρόπο. Επειδή, όμως, οι πρώτες 5 μπάλες μπορούν να βγουν με οποιαδήποτε σειρά, έχουμε 5! εξάδες με τις ίδιες μπάλες. Επομένως υπάρχουν $\binom{5}{4}\binom{2}{1} \cdot 5!$ ευνοϊκές περιπτώσεις. Οι δυνατές είναι $(7)_6$. Άρα,

$$P(A_1) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{\binom{5}{4}\binom{2}{1} 5!}{(7)_5} = \frac{5}{21}.$$

Τελικά $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{21} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21} = 0.286$.

2. Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα.

$A =$ { κατακτά το μουντιάλ η Αργεντινή}, $B =$ { κατακτά το μουντιάλ η Βραζιλία},

$I =$ { κατακτά το μουντιάλ η Ισπανία}, $Y =$ { κατακτά το μουντιάλ κάποια από τις υπόλοιπες 29 χώρες},

$M =$ {η κατανάλωση μπύρας αυξάνει.}.

$P(A) = P(I) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{30}{100}$ και $P(Y) = \frac{20}{100}$.

$P(M|A) = \frac{40}{100}$, $P(M|B) = \frac{35}{100}$, $P(M|I) = \frac{20}{100}$ και $P(M|Y) = \frac{45}{100}$.

(α′) Από το Θ.Ο.Π. έχουμε,
$P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|I)P(I) + P(M|Y)P(Y) = 0.345$.

(β′) Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός $A \cup I$, όταν είναι γνωστό ότι έχει συμβεί το γεγονός M^c.
Επομένως $P(A \cup I|M^c) = P(A|M^c) + P(I|M^c)$. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί τα γεγονότα A και I δεν έχουν κάποιο κοινό στοιχείο μεταξύ τους (είτε η κατανάλωση μπύρας αυξάνει, είτε δεν αυξάνει!).
Επομένως από το Θεώρημα Bayes προκύπτει ότι,

$$P(A|M^c) = \frac{P(M^c|A)P(A)}{P(M^c)} = \frac{0.6 \times 0.25}{0.655} = 0.229$$

και

$P(I|M^c) = \dfrac{P(M^c|I)P(I)}{P(M^c)} = \dfrac{0.8 \times 0.25}{0.655} = 0.305.$

Τελικά, $P(A \cup I|M^c) = 0.229 + 0.305 = 0.534$

Παρατήρηση. $P(M^c|A) = 1 - P(M|A) = 1 - 0.4 = 0.6$, $P(M^c|I) = 1 - P(M|I) = 1 - 0.2 = 0.8$ και $P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.345 = 0.655$.

3. (α΄) Έστω η τ.μ. X η οποία μετράει τον χρόνο που χρειάζεται για να δοθούν οι απαντήσεις σε όλα τα θέματα. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 100$ και $\sigma = 10$.

   Επειδή $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, έχουμε

   $P(X \leqslant 90) = P\left(\dfrac{X-100}{10} \leqslant \dfrac{90-100}{10}\right) = P(Z \leqslant -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$

   (β΄) Θεωρούμε την τ.μ. Y η οποία μετράει το πλήθος των φοιτητών που δίνουν απάντηση σε όλα τα θέματα σε περισσότερα από 90 λεπτά.

   $Y \sim \mathcal{B}(40, p)$, $p = P(X > 90) = 1 - P(X \leqslant 90) = 1 - 0.1587 = 0.8413$.

   $P(Y = 25) = \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \end{pmatrix} p^{25}(1-p)^{40-25}$

   $EY = np = 40 \times 0.8413 = 33.65$ είναι το αναμενόμενο πλήθος των φοιτητών που δίνουν απάντηση σε όλα τα θέματα σε περισσότερα από 90 λεπτά.

   (γ΄) Θεωρούμε την τ.μ. Z η οποία μετράει το πλήθος των φοιτητών που έχουν δώσει απάντηση σε όλα τα θέματα (μαύρα σφαιρίδια) από τους 25.

   $Z \sim H(z; m, n, r)$, $m = 40$, $n = 30$, $r = 25$ και $z = 10$.

   $P(Z = 10) = \dfrac{\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 25-10 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 70 \\ 25 \end{pmatrix}}.$

4. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) είναι ΔΙΑΚΡΙΤΟ.

   (α΄) $f_X(x) = \sum_{y=-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)$ είναι η περιθώρεια π.π. της τ.μ. X, επομένως αυτή προσδιορίζεται για όλες τις δυνατές τιμές της τ.μ. X ως εξής,

   $x = -1$, $f_X(-1) = \sum_{y=-1}^{1} f_{X,Y}(-1,y) = f_{X,Y}(-1,-1) + f_{X,Y}(-1,0) + f_{X,Y}(-1,1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{16}.$

   $x = 0$, $f_X(0) = \sum_{y=-1}^{1} f_{X,Y}(0,y) = f_{X,Y}(0,-1) + f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{4}{16}.$

   $x = 1$, $f_X(1) = \sum_{y=-1}^{1} f_{X,Y}(1,y) = f_{X,Y}(1,-1) + f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(1,1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16}.$

   Αντίστοιχα, $f_Y(y) = \sum_{x=-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)$ είναι η περιθώρεια π.π. της τ.μ. Y, και αυτή προσδιορίζεται για όλες τις δυνατές τιμές της τ.μ. Y ως εξής,

   $y = -1$, $f_Y(-1) = \sum_{x=-1}^{1} f_{X,Y}(x,-1) = f_{X,Y}(-1,-1) + f_{X,Y}(0,-1) + f_{X,Y}(1,-1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{16}.$

   $y = 0$, $f_Y(0) = \sum_{x=-1}^{1} f_{X,Y}(x,0) = f_{X,Y}(-1,0) + f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(1,0) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{16}.$

   $y = 1$, $f_Y(1) = \sum_{x=-1}^{1} f_{X,Y}(x,1) = f_{X,Y}(-1,1) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{4}{16}.$

(β′) $E(Y|X=0) = \sum_{y=-1}^{1} y f_{Y|X}(y|0)$.

$$f_{Y|X}(y|0) = \frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2} & , \ y=-1 \\ \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} & , \ y=0 \\ \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} & , \ y=1 \end{cases}$$

Επομένως, $E(Y|X=0) = (-1)\cdot f_{Y|X}(-1|0) + 0\cdot f_{Y|X}(0|0) + 1\cdot f_{Y|X}(1|0) = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

(γ′) $Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY)$.

$$E(XY) = \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=-1}^{1} xy f_{X,Y}(x,y)$$
$$= (-1)\cdot(-1)\cdot f_{X,Y}(-1,-1) + (-1)\cdot 1\cdot f_{X,Y}(-1,1) + 1\cdot(-1)\cdot f_{X,Y}(1,-1) + 1\cdot 1\cdot f_{X,Y}(1,1)$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{3}{16}.$$

$$EX = \sum_{x=-1}^{1} f_X(x) = (-1)\cdot f_X(-1) + 0\cdot f_X(0) + 1\cdot f_X(1) = -\frac{5}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{8}$$

$$EY = \sum_{y=-1}^{1} f_Y(y) = (-1)\cdot f_Y(-1) + 0\cdot f_Y(0) + 1\cdot f_Y(1) = -\frac{8}{16} + \frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

Επομένως, $Cov(X,Y) = -\frac{3}{16} - \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{32}$.

5. Θεωρούμε τις τ.μ. X_i, $i = 1,2,3$ όπου

X_1 μετράει το πλήθος των κλήσεων που φτάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο της Αθήνας σε 1 ώρα, $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\lambda_1 = 1500$.

X_2 μετράει το πλήθος των κλήσεων που φτάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο της Θεσσαλονίκης σε 1 ώρα, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $\lambda_2 = 800$.

X_3 μετράει το πλήθος των κλήσεων που φτάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο της Πάτρας σε 1 ώρα, $X_3 \sim \mathcal{P}(\lambda_3)$, $\lambda_3 = 200$.

Τότε σύμφωνα με τις κατανομές των αθροισμάτων, αφού οι τ.μ. X_1, X_2 και X_3 είναι ανεξάρτητες, προκύπτει ότι η τ.μ. $T = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$, δηλαδή $T \sim \mathcal{P}(2500)$, $ET = VarT = 2500$.

Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχουμε ότι η τ.μ. $W = \frac{T-ET}{\sqrt{VarT}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ ή διαφορετικά $W = \frac{T-2500}{50} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Επομένως, $P(T \geqslant 2580) = P\left(\frac{T-2500}{50} \geqslant \frac{2580-2500}{50\ \sigma}\right) = P\left(\overset{Z}{W} \geqslant \frac{80}{50}\right) = P(W \geqslant 1.6)$
$$= 1 - P(W < 1.6) = 1 - P(W \leqslant 1.6) = 1 - 0.945 = 0.055.$$

Παρατήρηση. Επειδή $W \sim \mathcal{N}(0,1)$, $P(W = 1.6) = 0$.

6. Θεωρούμε τις τ.μ. $X_i = \begin{cases} 0 & , \text{ αν βγάλω μαύρο σφαιρίδιο} \\ 1 & \text{ αν βγάλω λευκό σφαιρίδιο} \end{cases}, i = 1, 2, ..., N$

Οπότε $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$, $p = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = 4$, ενώ λόγω της κατανομής των X_i, $EX = p = \dfrac{2}{3}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι,

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = (EN)(EX) \Leftrightarrow EN = 6.$$

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2008

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 2 Ιουλίου 2008

1. 6 φοιτητές του τμ. Επιστήμης των Υλικών χρωστάνε τα μαθήματα "Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες", "Υπεραγωγοί", "Στοιχεία Μοριακής Φυσικής και Κβαντικής Χημείας" και "Οικονομικά για μη Οικονομολόγους".

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα όλοι οι φοιτητές να εξεταστούν ή στο μάθημα "Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες" ή στο μάθημα "Υπεραγωγοί".

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα όλοι οι φοιτητές να εξεταστούν το πολύ σε δύο μαθήματα; (15)

2. Μετά τον σεισμό των 6,5 ρίχτερ στις 8/6 στην περιοχή της Ανδραβίδας, η πιθανότητα στους επόμενους 2 μήνες να γίνει ένας μετασεισμός άνω των 6 ρίχτερ είναι 10%. Στην περίπτωση που γίνει αυτός ο μετασεισμός, εκτιμάται ότι το ποσοστό των σπιτιών στην περιοχή που έχουν κατασκευαστεί πριν το 1940 και πρόκειται να χαρακτηριστούν ως μη κατοικήσιμα είναι 20%, ενώ αν δεν γίνει ένας τέτοιος μετασεισμός, τότε το ποσοστό αυτών των σπιτιών εκτιμάται ότι θα είναι μόλις 5%.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα για ένα σπίτι, που έχει κατασκευαστεί πριν το 1940, να χαρακτηριστεί ως μη κατοικήσιμο μέχρι τις 8/8;

   (β΄) Αν γνωρίζουμε ότι κανένα σπίτι που έχει κατασκευαστεί πριν το 1940 δεν πρόκειται να θεωρηθεί μη κατοικήσιμο εώς τις 8/8, ποια είναι η πιθανότητα για μετασεισμό μικρότερο των 6 ρίχτερ; (15)

3. Θεωρούμε 3 κουτιά K_1, K_2, K_3 και το καθένα από αυτά περιέχει 5 λευκά και 3 μαύρα σφαιρίδια. Ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από το K_1 και μεταφέρεται στο K_2, στη συνέχεια ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από το K_2 και μεταφέρεται στο K_3 και τέλος ένα σφαιρίδιο επιλέγεται από το K_3. Ένας παίχτης κερδίζει 1 ευρώ κάθε φορά που επιλέγεται ένα λευκό σφαιρίδιο από οποιοδήποτε κουτί και χάνει 1 ευρώ όταν επιλέγεται μαύρο σφαιρίδιο. Βρείτε το αναμενόμενο κέρδος του παίχτη. (20)

4. Το ποσό των χρημάτων που έχει ένας φοιτητής του Πανεπιστημίου Πατρών στην τσέπη του είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 50 € και τυπική απόκλιση 20 €.

   (α΄) Αν πάρουμε τυχαία 5 φοιτητές του Π.Π., ποια είναι η πιθανότητα το πολύ 2 από αυτούς να έχουν στην τσέπη περισσότερο από 70 €;

   (β΄) Αν εξετάσουμε διαδοχικά αυτούς τους 5 φοιτητές, ποια είναι η πιθανότητα μόνο ο 5ος να έχει στην τσέπη του περισσότερα από 70 €;

   (γ΄) Αν γνωρίζουμε ότι σε ένα σύνολο 120 φοιτητών του Π.Π., οι 50 έχουν στην τσέπη τους περισσότερα από 70 € και ρωτήσουμε τυχαία 40 από τους 120, ποια είναι η πιθανότητα 15 από αυτούς τους 40 να έχουν στην τσέπη τους περισσότερα από 70 €; (20)

5. Δίνεται η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X και Y,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cy & , \ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1. \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   (α΄) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

   (β΄) Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ΄) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. X και Y.

   (δ΄) Να υπολογιστεί η καμπύλη παλινδρόμισης $E(X|Y)$.

   (ε΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(X < \frac{1}{2} | Y > \frac{1}{3}\right)$. (30)

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2012

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 4 Ιουλίου 2012

1. Διαθέτουμε μία κάλπη που περιέχει 24 διακεκριμμένα σφαιρίδια, εκ των οποίων τα 8 είναι μαύρα, τα 6 είναι άσπρα και τα υπόλοιπα (10) είναι κόκκινα. Παίρνουμε τυχαία 6 σφαιρίδια από την κάλπη και τα τοποθετούμε, από δύο σφαιρίδια, σε τρία άδεια κουτιά. Ποια είναι η πιθανότητα σε αυτά τα κουτιά να τοποθετήσουμε 2 μαύρα σφαιρίδια στο 1ο κουτί, 2 άσπρα σφαιρίδια στο 2ο κουτί και 2 κόκκινα στο 3ο κουτί; (10)

2. Στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Λονδίνου, μετέχουν αθλητές και από τις 5 Ηπείρους (Ευρώπη, Αμερική, Ασία, Αφρική, Ωκεανία). Το 25% από τους μετέχοντες προέρχονται από την Ευρώπη, το 20% από την Αμερική, το 30% από την Ασία, το 20% από την Αφρική και το υπόλοιπο 5% από την Ωκεανία. Η πιθανότητα, οι αθλητές από την Ευρώπη, να πάρουν πάνω από 60 χρυσά μετάλλια είναι 75%. Αν οι αθλητές προέρχονται από την Αμερική, αυτή η πιθανότητα (να πάρουν πάνω από 60 χρυσά μετάλλια) είναι 85%. Η πιθανότητα, οι αφρικανοί αθλητές, να πάρουν πάνω από 60 χρυσά μετάλλια είναι 60%, για τους ασιάτες 50% και για τους αθλητές της Ωκεανίας 35%.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, οι αθλητές μιας οποιασδήποτε ηπείρου, να πάρουν λιγότερα από 60 χρυσά μετάλλια;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας αθλητής να προέρχεται από την Ευρώπη, όταν γνωρίζουμε ότι η Ευρώπη στους Ολυμπιακούς αγώνες του 2012 παίρνει περισσότερα από 60 χρυσά μετάλλια; (20)

3. Ο χρόνος παρκαρίσματος του αυτοκινήτου, από μια γυναίκα οδηγό, είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή τα δύο λεπτά.

   (α΄) Υπολογίστε την πιθανότητα να παρκάρει το αυτοκίνητό της μια γυναίκα σε λιγότερο από 1 λεπτό.

   (β΄) Για 15 γυναίκες, ποια είναι η πιθανότητα, οι 10 από αυτές να παρκάρουν το αυτοκίνητό τους σε χρόνο μεγαλύτερο του 1 λεπτού;

   (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα για 20 γυναίκες, οι 10 να παρκάρουν σε χρόνο πάνω από 2 λεπτά, οι 8 σε χρόνο μεταξύ 1 λεπτού και 2 λεπτών και οι υπόλοιπες 2 σε χρόνο λιγότερο του 1 λεπτού; (20)

4. Το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) είναι ομοιόμορφο στον χώρο που περικλείεται από τις ευθείες $X = Y$, $X + Y = 2$, $Y = 1$, $Y = 0$.

   (α΄) Να προσδιοριστεί η πυκνότητα πιθανότητας του τ.δ. (X, Y).

   (β΄) Να υπολογιστεί η περιθώρια π.π. της τ.μ. Y.

   (γ΄) Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y.

   (δ΄) Να υπολογιστεί η καμπύλη παλινδρόμησης $\mathbb{E}(X|Y)$. (25)

5. Διαθέτουμε τρία ομοιόμορφα ζάρια, χρώματος κόκκινου, μπλε και πράσινου. Ρίχνουμε το κόκκινο ζάρι 180 φορές, το μπλε ζάρι 240 φορές και 300 φορές το πράσινο ζάρι. Να υπολογιστεί η πιθανότητα, μετά την ρίψη και των τριών ζαριών, να εμφανιστεί η πλευρά 6 τουλάχιστον 135 φορές. (15)

6. Σε ένα υποκατάστημα μιας τράπεζας εξυπηρετούνται κατά μέσο όρο 120 πελάτες την ημέρα. Χρησιμοποιώντας την 1η ταυτότητα του Wald, προσδιορίστε το ελάχιστο πλήθος των ημερών που χρειάζονται για να εξυπηρετηθούν 1800 πελάτες από το εν λόγω υποκατάστημα. (10)

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 5 Σεπτεμβρίου 2012

1. Διαθέτουμε 20 διακεκριμμένα σφαιρίδια και τρία κουτιά K1, K2 και K3. Ρίχνουμε ένα ομοιόμορφο ζάρι. Αν έρθει η πλευρά 1 ή 2, τότε τοποθετούμε ένα σφαιρίδιο στο K1, αν έρθει η πλευρά 3 ή 4 ή 5 τοποθετούμε ένα σφαιρίδιο στο K2, ενώ αν έρθει η πλευρά 6, τότε τοποθετούμε ένα σφαιρίδιο στο K3. Οι ρίψεις του ζαριού ολοκληρώνονται εώς ότου όλα τα σφαιρίδια τοποθετηθούν στα κουτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να τοποθετηθούν 8 σφαιρίδια στο K1, 10 στο K2 και 2 στο K3; (10)

2. Ένα ζευγάρι (άντρας και γυναίκα) θέλει να πάει διακοπές σε ένα ελληνικό νησί. Τελικά καταλήγουν να πάνε σε ένα από τα παρακάτω, ή Σκιάθο ή Ζάκυνθο ή Πάρο (με την ίδια πιθανότητα). Αν επιλέξουν τη Σκιάθο, η πιθανότητα να τσακωθούν μεταξύ τους κατά τη διάρκεια των διακοπών είναι 20%. Αν επιλέξουν τη Ζάκυνθο αυτή η πιθανότητα γίνεται 30%, ενώ αν πάνε στην Πάρο η πιθανότητα να τσακωθούν είναι 40%.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, για το ζευγάρι, να τσακωθούν μεταξύ τους κατά τη διάρκεια των διακοπών;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε για διακοπές στη Ζάκυνθο ή στην Πάρο, όταν είναι γνωστό ότι δεν πρόκειται να τσακωθούν; (15)

3. Το πλήθος των γεννήσεων σε μια μαιευτική κλινική είναι μια Poisson τυχαία μεταβλητή με μέσο όρο 5 γεννήσεις το οκτάωρο.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, μέσα σε μια ημέρα, να έχουμε το πολύ 10 γεννήσεις;

   (β΄) Για τον επόμενο μήνα (30 ημέρες), ποια είναι η πιθανότητα ώστε για 10 ημέρες του μήνα να έχουμε το πολύ 10 γεννήσεις την ημέρα;

   (γ΄) Για τον ίδιο μήνα, ποια είναι η πιθανότητα ώστε για 10 ημέρες να έχουμε το πολύ 10 γεννήσεις την ημέρα, για 6 ημέρες από 11 εώς και 15 γεννήσεις την ημέρα, ενώ τις υπόλοιπες ημέρες πάνω από 15 γεννήσεις την ημέρα; (20)

4. Δίνεται η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X και Y,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\dfrac{y}{x^4} & , \ 1 < y < x < 2. \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   (α΄) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

   (β΄) Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ΄) Υπολογίστε την καμπύλη παλινδρόμισης $E(Y|X)$. (20)

5. Θεωρούμε τις τ.μ. X και Y με τιμές αντίστοιχα $\{-1,0,1\}$ και $\{-1,1\}$ και από κοινού πυκνότητα πιθανότητας, όπως αυτή δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

X/Y	-1	1
-1	1/8	1/4
0	3/8	1/16
1	1/16	1/8

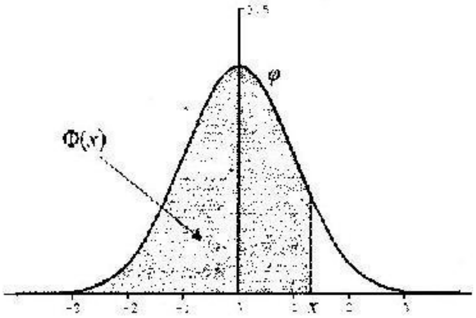
Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ. X και Y. Ποια είναι τα συμπεράσματά σας; (15)

6. Αν γνωρίζετε ότι ο χρόνος παρκαρίσματος του αυτοκινήτου, από μια γυναίκα οδηγό, είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή τα δύο λεπτά, υπολογίστε, μέσω ΚΟΘ, την πιθανότητα, όπως 800 γυναίκες, που προσπαθούν να παρκάρουν το αυτοκίνητό τους, δεν ξεπερνούν συνολικά τα 800 λεπτά. (10)

7. Αν θεωρήσουμε ως $X(t)$ το πλήθος των αφίξεων των αεροπλάνων στο αεροδρόμιο «Ελ. Βενιζέλος» στο χρονικό διάστημα $(0, t)$ και ως Y_n το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται μέσα στο αεροδρόμιο «Ελ. Βενιζέλος» κατά την άφιξη του $n-$οστού αεροπλάνου $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, τότε κατατάξτε τις παραπάνω στοχαστικές διαδικασίες ως προς το χρόνο αλλά και ως προς το τον χώρο καταστάσεων. (10)

Πίνακας τιμών της σ.κ. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής (x = 0, 0.01, 0.02, ..., 3.09)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 12 Ιουνίου 2013

1. 120 κάτοικοι μιας πόλης διαβάζουν ακριβώς μια εφημερίδα κάθε Κυριακή. Αν σε αυτήν την πόλη διατίθενται τρεις εφημερίδες, Α, Β, Γ,

   (α΄) υπολογίστε την πιθανότητα 70 κάτοικοι να διαβάζουν την εφημερίδα Α, 30 την Β και 20 την Γ.

   (β΄) Αν ισχύει ο καταμερισμός του ερωτήματος (α), υπολογίστε την πιθανότητα, αν επιλέξουμε 40 κατοίκους αυτής της πόλης, το πολύ 10 από αυτούς να διαβάζουν την εφημερίδα Β. (15)

2. Σύμφωνα με την τελευταία απογραφή του ελληνικού πληθυσμού (2011), το 30% του πληθυσμού (15 ετών και άνω) είναι μέχρι 29 ετών, το 30% του πληθυσμού είναι από 30 εώς 49 ετών και το υπόλοιπο 40% είναι πάνω από 50 ετών. Η πιθανότητα ένα άτομο από τον παραπάνω πληθυσμό, ηλικίας μέχρι 29 ετών, να έχει προφίλ στο facebook είναι 60%, για άτομα ηλικίας 30 εώς 49 ετών, αυτή η πιθανότητα είναι 40%, ενώ η πιθανότητα, για ένα άτομο άνω των 50 ετών, να μπορούμε να το βρούμε στο facebook είναι 25%.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, ένα άτομο από τον παραπάνω πληθυσμό να έχει προφίλ στο facebook;

   (β΄) Αν διαλέξουμε ένα άτομο από τον παραπάνω πληθυσμό και διαπιστώσουμε ότι δεν βρίσκεται στο facebook, ποια είναι η πιθανότητα να είναι άνω των 50 ετών; (15)

3. Θεωρούμε ότι το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται από ένα ταμείο ενός supermarket είναι μια Poisson τ.μ., με μέση τιμή 20 πελάτες την ώρα.

   (α΄) Υπολογίστε την πιθανότητα να εξυπηρετηθούν τουλάχιστον 2 πελάτες τα επόμενα 15 λεπτά.

   (β΄) Για τις επόμενες 2 ώρες, ποια είναι η πιθανότητα για μισή ώρα (από αυτές τις δύο ώρες) να εξυπηρετούνται από το συγκεκριμένο ταμείο τουλάχιστον 2 πελάτες το 15λεπτο;

   (γ΄) Ο διευθυντής του supermarket καταγράφει ανά 15λεπτο, το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται από το συγκεκριμένο ταμείο. Ποια είναι η πιθανότητα στο 6^0 15λεπτο αυτής της καταγραφής να εξυπηρετούνται τουλάχιστον 2 πελάτες; (20)

4. Δίνεται η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. X και Y,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^3y^3} & , \ x > y > 1. \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   (α΄) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

   (β΄) Να υπολογιστούν οι περιθώριες π.π. των τ.μ. X και Y.

   (γ΄) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ. X και Y.

   (δ΄) Υπολογίστε την $E(X|Y=2)$. (25)

5. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εμφιαλώσεως ενός μπουκαλιού 1,5 λίτρου είναι μια εκθετική τ.μ. με μέση τιμή 4 sec. Αν εμφιαλώσουμε 100 τέτοια μπουκάλια, υπολογίστε, μέσω ΚΟΘ, την πιθανότητα ο χρόνος εμφιαλώσεως να είναι μεταξύ 360 και 420 sec. (15)

6. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο αμερόληπτα ζάρια. Υπολογίστε, μέσω της 1ης ταυτότητας του Wald, πόσες φορές αναμένω να ρίξω τα ζάρια, έτσι ώστε να έχουμε σε 12 φορές την ίδια πλευρά και στα δύο ζάρια. (10)

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικές Διαδικασίες
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος
Ημ. Εξέτασης: 12 Ιουνίου 2013

1. (α΄) Έχουμε ένα πρόβλημα επαναληπτικής δειγματοληψίας, όπου τα σφαιρίδια (οι κάτοικοι της πόλης) είναι διακεκριμένα και τα τοποθετούμε σε 3 κάλπες (οι εφημερίδες) με περιορισμό. Επομένως, αν ορίσουμε το γεγονός $A = \{70$ κάτοικοι διαβάζουν την εφημερίδα Α, 30 κάτοικοι διαβάζουν την εφημερίδα Β και 20 κάτοικοι διαβάζουν την εφημερίδα Γ$\}$, τότε

$$P(A) = \frac{\frac{120!}{70!30!20!}}{3^{120}}.$$

(β΄) Σε αυτό το ερώτημα έχουμε ένα πρόβλημα δειγματοληψίας χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς διάταξη και μας ενδιαφέρει να βρούμε την πιθανότητα το πολύ 10 να διαβάζουν την εφημερίδα Β. Ορίζουμε τα γεγονότα $B_i = \{i$ κάτοικοι διαβάζουν την εφημερίδα Β$\}$, τότε

$$P(B_i) = \frac{\binom{30}{i}\binom{90}{40-i}}{\binom{120}{40}}\ ,\ \ i = 0, 1, \ldots, 30.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} P(B_i)$.

2. Ορίζουμε τα γεγονότα,

$A = \{$το άτομο έχει σελίδα στο facebook$\}$

$B_1 = \{$το άτομο είναι μέχρι 29 ετών$\}$

$B_2 = \{$το άτομο είναι από 30 μέχρι 49 ετών$\}$

$B_3 = \{$το άτομο είναι από 50 ετών και πάνω$\}$.

(α΄) Αρχικά χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για να υπολογίσουμε την $P(A)$,
$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = 0.6 \times 0.3 + 0.4 \times 0.3 + 0.25 \times 0.4 = 0.4.$

(β΄) Εδώ, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Bayes, δηλ.
$P(B_3|A^c) = \dfrac{P(A^c|B_3)P(B_3)}{P(A^c)} = \dfrac{0.75 \times 0.4}{0.6} = 0.5.$
Προσοχή! $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$ και $P(A^c|B_3) = 1 - P(A|B_3) = 1 - 0.25 = 0.75$

3. Αν X είναι η τ.μ. που μετράει το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται από ένα ταμείο ενός supermarket, τότε, σύμφωνα με την άσκηση $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα στο 15λεπτο, η παράμετρος $\lambda = 5$ πελάτες/15λεπτο, δηλ. $X \sim \mathcal{P}(5)$, άρα

$$f(x) = \frac{5^x}{x!}\, e^{-5}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

(α΄) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (e^{-5} + 5e^{-5}) = p.$

(β΄) Αν θεωρήσουμε ως Y να μετράει το πλήθος των 15λεπτων όπου εξυπηρετούνται τουλάχιστον 2 πελάτες/15λεπτο, τότε

$$Y \sim B(8, p)\ , p = P(X \geqslant 2)$$

Επομένως, $P(Y = 2) = \binom{8}{2} p^2 (1-p)^{8-2}$.

(γ′) Θεωρούμε ως W την τ.μ. που μετράει το πλήθος των αποτυχιών (δεν εξυπηρετούνται τουλάχιστον 2 πελάτες/15λεπτο) μέχρι την πρώτη επιτυχία (εξυπηρετούνται τουλάχιστον 2 πελάτες/15λεπτο), τότε $W \sim Ge(p)$, $p = P(X \geqslant 2)$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι,

$$P(W = 5) = p(1-p)^5.$$

4. (α′) $\displaystyle\int_1^\infty \int_y^\infty \frac{c}{x^3y^3}dxdy = 1 \Rightarrow c = 8.$

(β′) $\displaystyle f_X(x) = \int f(x,y)dy = \int_1^x \frac{8}{x^3y^3}dy = 4x^{-3}(1-x^{-2}),\ x > 1.$

$\displaystyle f_Y(y) = \int f(x,y)dx = \int_y^\infty \frac{8}{x^3y^3}dx = 4y^{-5},\ y > 1.$

(γ′) Θέλουμε να υπολογίσουμε την $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.

$\displaystyle \mathbb{E}(XY) = \int_1^\infty \int_y^\infty xy\frac{8}{x^3y^3}dxdy = 4.$

$\displaystyle \mathbb{E}X = \int xf_X(x)dx = \int_1^\infty x\ 4x^{-3}(1-x^{-2})dx = \frac{8}{3}.$

$\displaystyle \mathbb{E}Y = \int yf_Y(y)dy = \int_1^\infty y\ 4y^{-5}dy = \frac{4}{3}.$

Τελικά $\displaystyle Cov(X,Y) = 4 - \frac{8}{3}\frac{4}{3} = \frac{4}{9}.$

(δ′) $\displaystyle \mathbb{E}(X|Y=y) = \int xf_{X|Y}(x|y)dx$, όπου

$\displaystyle f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8x^{-3}y^{-3}}{4y^{-5}} = \frac{2y^2}{x^3},\ 1 < y < x$, οπότε

$\displaystyle \mathbb{E}(X|Y=y) = \int_y^\infty x\frac{2y^2}{x^3}dx = 2y.$

Τελικά, $\mathbb{E}(X|Y=2) = 2 \times 2 = 4$.

5. Έστω X_i η τ.μ. που μετράει τον χρόνο εμφιαλώσεως του μπουκαλιού i,

τότε $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $i = 1,2,\ldots,100$, $\lambda = 1/4$, $\mathbb{E}X_i = 4$, $VarX_i = 4^2 = 16$.

Θέτουμε $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, άρα $ES = 100 \times 4 = 400$ και $VarS = 100 \times 16 = 1600 = 40^2$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $P(360 < S < 420)$ και πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

$$P(360 < S < 420) = P\left(\frac{360-400}{\sqrt{1600}} < \frac{S-\mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} < \frac{420-400}{\sqrt{1600}}\right) = P(-1 < Z < 0.5),$$

όπου $\displaystyle Z = \frac{S-\mathbb{E}S}{\sqrt{VarS}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ.

Επομένως,

$P(360 < S < 420) = P(-1 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z \leqslant -1) = P(Z \leqslant 0.5) - P(Z \leqslant -1) = \Phi(0.5) - \Phi(-1) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(1)) = 0.6915 - (1 - 0.8413) = 0.5328.$

6. Η 1η ταυτότητα του Wald είναι, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}N)$,
   $N = \min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n = 12\}$, όπου
   X_i : μετράει αν έχω την ίδια πλευρά και στα δύο ζάρια, $X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$, $p = \dfrac{6}{21} = \mathbb{E}X_i$, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) = 12$,
   οπότε από την ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι $\mathbb{E}N = 42$ ημέρες.