ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Εξετάσεις Ιουνίου 2005
(10-6-2005)

Επώνυμο: .... **Όνομα**: .... **Α. Μ.** :..........

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η εξίσωση Legendre:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \quad n=0,1,2,\ldots \quad , x\in[-1,1]$$

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\cos x$ στα τρία πρώτα πολυώνυμα Legendre $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$. Δίνεται η συνθήκη ορθοκανονικοποίησης:

$$\left(P_n,P_m\right)=\int_{-1}^{1} w(x)P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

όπου $w(x)$ η συνάρτηση βάρους. **(2.5M)**

ΘΕΜΑ 2

Να επιλυθεί η μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

στο διάστημα $x\in[0,L]$, με συνοριακές συνθήκες: $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ και αρχικές συνθήκες $u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=0$. **(2.5M)**

ΘΕΜΑ 3

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Fourier $F(k)$ των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}\exp(-\alpha x)\cos 2x & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$, όπου $\alpha>0$.

β) $f(x)=\sin^2 x$.

ΘΕΜΑ 4

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση Green του τελεστή $L=\frac{d^2}{dx^2}+1$ στο διάστημα $0\le x\le\pi$ με συνοριακές συνθήκες

$$y(0)=y(\pi)\, ,\; y'(0)=y'(\pi)$$

δίνεται από τη σχέση

$$G(x,x')=\frac{1}{2}\varepsilon(x-x')\sin(x-x')$$

όπου

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1, \text{ για } x>0\\ -1, \text{ για } x<0\end{cases}$$ **(2.5M)**

Δίνεται η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sin(a-b)=\cos b\sin a-\cos a\sin b$.

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005
(30-9-2005)

Επώνυμο: .... **Όνομα**: .... **Α. Μ.** :..........

<u>ΘΕΜΑ 1</u>
Τα πολυώνυμα Chebyshev $T_n(x)$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

όπου $x \in [-1,1]$.
Η συνθήκη ορθογωνιότητας και κανονικοποίησης είναι:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad \textit{και} \quad \int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi/2 & \gamma\iota\alpha \ n \neq 0 \\ \pi & \gamma\iota\alpha \ n = 0 \end{cases}$$

Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [-1,1]$, στα τρία πρώτα πολυώνυμα Chebyshev:
$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$ **(2.5M)**

<u>ΘΕΜΑ 2</u>
Να επιλυθεί η διδιάστατη εξίσωση Laplace

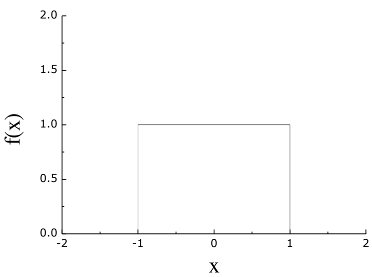
$$\nabla^2 u = 0$$

στο διάστημα $x \in [0, L]$, με συνοριακές συνθήκες: $u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0$ και $u(x, L) = x$. **(2.5M)**

<u>ΘΕΜΑ 3</u>
Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Fourier $F(k)$ των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \cos^2 x$ **(1.25M)**

β) **(1.25M)**



<u>ΘΕΜΑ 4</u>
Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u(x, 0) = 3e^{-5x}$$

(2.5M)

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006
(25-9-2006)

Επώνυμο: .... **Όνομα**: .... **Α. Μ.** :..........

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

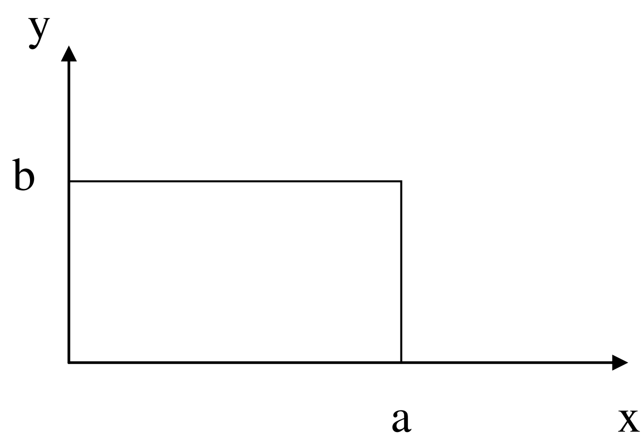
Δίνεται η εξίσωση Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$ με $x\in[-1,1]$ και $[\lambda=n(n+1), n=0,1,2,3,...]$. Να φέρεται την εξίσωση Legendre σε μορφή Liouville. Ποιες οι συναρτήσεις βάρους και δυναμικού;
Να αναπτυχθεί η συνάρτηση e^{-2x} στα δύο πρώτα πολυώνυμα Legendre : $P_0(x)=1$ και $P_1(x)=x$. Δίνεται η συνθήκη ορθοκανονικοποίησης $\left(P_n,P_m\right)=\dfrac{2}{2n+1}\delta_{nm}$. **(1.5M)**

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Να δείξετε ότι το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές και ύστερα να το επιλύσετε : $y''+\lambda y=0$ με $x\in[0,L]$ και συνοριακές συνθήκες $y(0)=0$ και $y(L)=y'(L)$. **(2.0M)**
Στη συνέχεια να αναπτυχθεί σε ιδιοσυναρτήσεις αυτού του προβλήματος η συνάρτηση $f(x)=x+L$ με $x\in[0,L]$. **(1.5M)**

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Θεωρούμε ένα 2Δ αέριο το οποίο είναι περιορισμένο εντός ορθογωνίου με πλευρές a και b. Η πυκνότητα $n(x,y,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης



$$\nabla^2 n=\frac{\partial n}{\partial t}$$

όπου $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$. Οι συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί η πυκνότητα στα όρια της περιοχής είναι: $n(0,y)=n(a,y)=0$ και $n_y(x,0)=n_y(x,b)=0$. Επιλύστε το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών γνωρίζοντας ότι αρχικά (t=0) η πυκνότητα δίνεται από την $n(x,y,0)=\delta(x-a/2)\cos(\pi y/b)$. **(3.5M)**

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\exp[i2(x-y)]dy$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης. **(1.5M)**

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2007
(13-9-2007)

Επώνυμο: .... **Όνομα**: .... **Α. Μ.** :..........

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών: $\frac{1}{4}y'' + \lambda y = 0$ με Ο.Σ.Σ: $y(0) = y'(L) = 0$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του προβλήματος και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις που αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Β. Στη συνέχεια να αναπτυχθεί σε ιδιοσυναρτήσεις αυτού του προβλήματος η συνάρτηση $f(x) = c$, όπου c τυχαία μη-μηδενική σταθερά και $x \in [0, L]$.

Δίνεται ότι: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

(3.5Μ)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Να φέρεται σε μορφή Liouville τα κάτωθι προβλήματα ιδιοτιμών και να δείξετε αν έχουν σίγουρα πραγματικές ιδοτιμές. Ποιες οι συναρτήσεις βάρους και δυναμικού;

a. $(2x-1)y'' + 2y' + (4\lambda - x^2)y = 0, \quad y(1) = 2y'(0), \quad y'(1) = y(0) + y'(0)$

b. $x^2 y'' + (x-1)y' + (\lambda - \sin x)y = 0, \quad y(0) + 2y'(0) = 1, \quad y(1) = 0$

(1.5Μ)

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

a. $\frac{1}{4}y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow y'' + 4\lambda y = 0$. Η εξίσωση είναι σε μορφή Liouville με συνάρτηση βάρους $w(x) = 4$.

Η Διαφορική αυτή εξίσωση είναι 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές και άρα θα έχει λύσεις της μορφής $y(x) \approx e^{\rho x}$. Επειδή έχουμε αμιγείς ομογενείς συνοριακές συνθήκες, από το πρώτο θεώρημα Sturm-Liouville προκύπτει ότι αναγκαστικά το πρόβλημα έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές, δηλαδή $\lambda \geq 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $\rho^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \rho = \pm i2\sqrt{\lambda}$.

Αν θέσω $\lambda = k^2$, η λύση θα έχει τη μορφή $y(x) = ce^{i2kx} + de^{-i2kx}$ και αναπτύσσοντας τα εκθετικά καταλήγουμε με την ακόλουθη μορφή για την λύση της εξίσωσης $y(x) = A\sin(2kx) + B\cos(2kx)$

και άρα η πρώτη παράγωγος $y'(x) = 2kA\cos(2kx) - 2kB\sin(2kx)$.

Από την πρώτη συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ έχουμε $y(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B = 0 \Rightarrow B = 0$.

Άρα $y(x) = A\sin(2kx)$.

Από την δεύτερη συνοριακή συνθήκη $y'(L) = 0$ έχουμε

$\cos(2kL) = 0 \Rightarrow 2k_n L = (n + \frac{1}{2})\pi, n = 0,1,2,3,....$. Προσέξτε ότι τώρα κρατάμε και την λύση $n = 0$ σε αντίθεση με το πρόβλημα της χορδής με σταθερά άκρα ($y(0) = y(L) = 0$).

Άρα τελικά $\left.\begin{aligned} y_n(x) &= A_n \sin(2k_n x) \\ k_n &= (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2L} \end{aligned}\right\}, n = 0,1,2,...$

Το επόμενο βήμα είναι να κανονικοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις ώστε αυτές να αποτελούν ορθοκανονική βάση. Δεν υπάρχει λόγος να χειριστούμε ξεχωριστά την περίπτωση $n = 0$ γιατί $y_0(x) = B_0\cos(\frac{\pi}{2L}x)$ που είναι μη σταθερά πλέον.

Άρα τελικά θα έχουμε

$$(y_n, y_n) = \int_0^L w(x)\|y_n(x)\|^2 dx = \int_0^L 4A_n^2 \sin^2(2k_n x)dx = \int_0^L 4A_n^2\left[1 - \cos^2(2k_n x)\right]dx =$$

$$= \int_0^L 4A_n^2 dx - 2A_n^2\int_0^L [1 + \cos(4k_n x)]dx = 4A_n^2 L - 2A_n^2\int_0^L [1 + \cos(4k_n x)]dx$$

$$= 4A_n^2 L - 2A_n^2\left[L + \frac{1}{4k_n}\sin(4k_n x)\Big|_0^L\right] = 4A_n^2 L - 2A_n^2\left[L + \frac{1}{4k_n}\sin[\frac{2\pi}{L}(n + \frac{1}{2})x]\Big|_0^L\right] =$$

$$4A_n^2 L - 2A_n^2\left[L + \frac{1}{4k_n}\left(\sin(2\pi(n + \frac{1}{2})) - \sin 0\right)\right] = 4A_n^2 L - 2A_n^2 L = 2A_n^2 L$$

και δεδομένου ότι $(y_n, y_n) = 1 \Rightarrow 2A_n^2 L = 1 \Rightarrow A_n = \frac{1}{\sqrt{2L}}$

Άρα τελικά οι ιδιοσυναρτήσεις θα έχουν την μορφή

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\sin(2k_n x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, n = 1,2,3,..$$

b. Η συνάρτηση $f(x)=c$ αναπτύσσεται στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων με συντελεστές.

$$c_n=\left(y_n,f\right)=\int_0^L w(x)y_n^*(x)f(x)dx=\int_0^L 4\frac{1}{\sqrt{2L}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)cdx$$
$$=\frac{4c}{\sqrt{2L}}\left[\int_0^L L\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)dx\right]$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_0^L L\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}dx=-\frac{2L^2}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\bigg|_0^L=-\frac{2L^2}{(2n+1)\pi}\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}-1\right)$
$=\frac{2L^2}{(2n+1)\pi}$

και τελικά

$$c_n=\left(y_n,f\right)=\int_0^L w(x)y_n^*(x)f(x)dx=\int_0^L 4\frac{1}{\sqrt{2L}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)cdx$$
$$=\frac{4c}{\sqrt{2L}}\left[\int_0^L L\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)dx\right]=\frac{4c}{\sqrt{2L}}\frac{2L^2}{(2n+1)\pi}$$

Οπότε :

$$f(x)=c=\sum_{n=0}^{\infty}c_n y_n(x)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4c}{\sqrt{2L}}\frac{2L^2}{(2n+1)\pi}\frac{1}{\sqrt{2L}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$
$$=\frac{4Lc}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

ΘΕΜΑ 2

A. $(2x-1)y''+2y'+(4\lambda-x^2)y=0,\quad y(1)=2y'(0),\ \ y'(1)=y(0)+y'(0)$

Η μορφή Liouville είναι

$py''+p'y'+(\lambda w-xu)y=0$

Δεδομένου ότι $(2x-1)'=2$ η εξίσωση είναι ήδη σε μορφή Liouville με

$w(x)=4, u(x)=x^2$

Δεδομένου ότι οι ΟΣΣ είναι μικτές θα έχω

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=2y'(0) \\ y'(1)=y(0)+y'(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

$$\det(S)=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq -1=\frac{p(1)}{p(0)}$$

Άρα δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα αν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

B. $x^2y''+(x-1)y'+(\lambda-\sin x)y=0,\ \ y(0)+2y'(0)=1,\ \ y(1)=0$

Έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές γιατί έχει αμιγείς ΟΣΣ.

Δεν είναι σε μορφή Liouville και έχουμε

$-x^2y''-(x-1)y'+(\sin x)y=\lambda y \Rightarrow$

$a(x)=-x^2, b(x)=-(x-1), w(x)=1, c(x)=\sin x$

$$\mu(x)=\frac{1}{a(x)}e^{\int\frac{b}{a}dx}=-\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x-1}{x^2}dx}$$

$$\int\frac{x-1}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{x}+c$$

$$\mu(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|+\frac{1}{x}+c}=-\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}e^{\frac{1}{x}}e^{c}=-\frac{1}{x^2}|x|e^{\frac{1}{x}}e^{c}$$

$$\mu(x)\leq 0\Rightarrow \mu(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

και άρα

$$p(x)=a(x)\mu(x)=x^2\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=xe^{\frac{1}{x}}$$

$$p'(x)=b(x)\mu(x)=(x-1)\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}1\right)$$

$$w(x)=-\mu(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

$$u(x)=c(x)\mu(x)=-\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Επι πτυχίω εξεταστική Φεβρουαρίου 2008
(06-02-2008)

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

A. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών $\frac{1}{16}y'' + \lambda y = 0$ με Ο.Σ.Σ. $y'(0) = y'(L) = 0$. Να το φέρετε σε μορφή Liouville και να δείξετε ότι έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές. Ποιες οι συναρτήσεις βάρους και δυναμικού; Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του προβλήματος και οι ιδιοσυναρτήσεις που αποτελούν ορθοκανονική βάση.

B. Να αναπτυχθεί σε ιδιοσυναρτήσεις αυτού του προβλήματος η συνάρτηση $f(x) = Lx$ με $x \in [0, L]$.

Δίνεται $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

a. $\frac{1}{16}y''+\lambda y=0 \Rightarrow y''+16\lambda y=0$. Η εξίσωση είναι σε μορφή Liouville με συνάρτηση βάρους $w(x)=16$.
Η Διαφορική αυτή εξίσωση είναι $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές και άρα θα έχει λύσεις της μορφής $y(x)\approx e^{\rho x}$. Επειδή έχουμε αμιγείς ομογενείς συνοριακές συνθήκες, από το πρώτο θεώρημα Sturm-Liouville προκύπτει ότι αναγκαστικά το πρόβλημα έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές, δηλαδή $\lambda \ge 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $\rho^2+16\lambda=0 \Rightarrow \rho=\pm i4\sqrt{\lambda}$.
Αν θέσω $\lambda=k^2$, η λύση θα έχει τη μορφή $y(x)=ce^{i4kx}+de^{-i4kx}$ και αναπτύσσοντας τα εκθετικά καταλήγουμε με την ακόλουθη μορφή για την λύση της εξίσωσης $y(x)=A\sin(4kx)+B\cos(4kx)$
και άρα η πρώτη παράγωγος $y'(x)=4kA\cos(4kx)-4kB\sin(4kx)$.
Από την πρώτη συνοριακή συνθήκη $y'(0)=0$ έχουμε $y'(0)=A4k\cos 0-B4k\sin 0=A4k=0 \Rightarrow A=0$.
Άρα $y(x)=B\cos(4kx)$ και $y'(x)=-4kB\sin(4kx)$.
Από την δεύτερη συνοριακή συνθήκη $y'(L)=0$ έχουμε
$\sin(4kL)=0 \Rightarrow 4k_nL=n\pi, n=0,1,2,3,....$. Προσέξτε ότι τώρα κρατάμε και την λύση $n=0$ σε αντίθεση με το πρόβλημα της χορδής με σταθερά άκρα ($y(0)=y(L)=0$).

Άρα τελικά $\left.\begin{aligned} y_n(x)&=B_n\cos(4k_nx) \\ k_n&=\frac{n\pi}{4L} \end{aligned}\right\}, n=0,1,2,...$

Το επόμενο βήμα είναι να κανονικοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις ώστε αυτές να αποτελούν ορθοκανονική βάση. Θα χειριστούμε διαφορετικά τις περιπτώσεις $n=0$ και $n\ne 0$.
Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $n=0$ για την οποία $k_0=0$ και $y_0(x)=B_0$

Θα έχουμε $(y_0,y_0)=\int_0^L w(x)\|y_0(x)\|^2\,dx=\int_0^L 16B_0^{\,2}dx=16B_0^{\,2}L$ και δεδομένου ότι

$(y_0,y_0)=1 \Rightarrow 16B_0^{\,2}L=1 \Rightarrow B_0=\frac{1}{4\sqrt{L}}$

Για την περίπτωση που $n\ne 0$ και παίρνοντας υπόψη μας το ολοκλήρωμα που δίνεται στην εκφώνηση θα έχουμε

$$(y_n,y_n)=\int_0^L w(x)\|y_n(x)\|^2\,dx=\int_0^L 16B_n^{\,2}\cos^2(4k_nx)dx=8B_n^{\,2}\int_0^L[1+\cos(8k_nx)]dx$$

$$=8B_n^{\,2}\left[L+\frac{1}{8k_n}\sin(8k_nx)\Big|_0^L\right]=8B_n^{\,2}\left[L+\frac{1}{8k_n}\sin(\frac{2n\pi}{L}x)\Big|_0^L\right]=8B_n^{\,2}L$$

και δεδομένου ότι $(y_n,y_n)=1 \Rightarrow 8B_n^{\,2}L=1 \Rightarrow B_n=\frac{1}{\sqrt{8L}}$

Άρα τελικά οι ιδιοσυναρτήσεις θα έχουν την μορφή

$$\begin{cases} y_0(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{L}} \\ y_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{8L}}\cos(4k_nx)=\dfrac{1}{\sqrt{8L}}\cos\dfrac{n\pi x}{L} \quad ,n=1,2,3,... \end{cases}$$

b. Η συνάρτηση $f(x)=Lx$ αναπτύσσεται στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n y_n(x)$.

Για $n=0$ θα έχουμε

$$c_0=\left(y_0,f\right)=\int_0^L w(x)y_0^*(x)f(x)dx=\int_0^L 4\frac{1}{2\sqrt{L}}(x+L)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{L}}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L+\left.Lx\right|_0^L\right]=\frac{2}{\sqrt{L}}\left[\frac{L^2}{2}+L^2\right]=3L^{3/2}$$

Για $n\neq 0$ θα έχουμε

$$c_n=\left(y_n,f\right)=\int_0^L w(x)y_n^*(x)f(x)dx=\int_0^L 4\frac{1}{\sqrt{2L}}\cos\frac{n\pi x}{L}(x+L)dx=\frac{4}{\sqrt{2L}}\left[\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\int_0^L L\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_0^L L\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\left.\frac{L^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right|_0^L=0$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα κάνω την αλλαγή μεταβλητής $z=\frac{n\pi}{L}x$.

Άρα :

$$\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi}z\cos z dz=\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\int_0^{n\pi}d(z\sin z)-\int_0^{n\pi}\sin z dz\right]$$

$$=\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\left.z\sin z\right|_0^{n\pi}-\int_0^{n\pi}\sin z dz\right]=-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi}\sin z dz=\left.\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos z\right|_0^{n\pi}$$

$$=\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=\frac{L^2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

και τελικά $c_n=\frac{4}{\sqrt{2L}}\frac{L^2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\frac{(2L)^{3/2}}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$.

Οπότε :

$$f(x)=c_0y_o(x)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x)=3L^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{L}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2L)^{3/2}}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\frac{1}{\sqrt{2L}}\cos\frac{n\pi x}{L}\Rightarrow$$

$$f(x)=x+L=\frac{3}{2}L+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{L}\Rightarrow$$

$$f(x)=x+L=\frac{3}{2}L-\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{4L}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2008
(06-09-2008)

ΘΕΜΑ 1

Α. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών $\frac{1}{16}y'' + \lambda y = 0$ με Ο.Σ.Σ. $y(0) = y(L) = 0$.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του προβλήματος και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις που αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Β. Στη συνέχεια να αναπτυχθεί σε ιδιοσυναρτήσεις αυτού του προβλήματος η συνάρτηση $f(x) = c(x - L)$ με με $x \in [0, L]$ και c τυχαία σταθερά.

Δίνεται $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

(3.5M)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση Laguerre $xy'' + (1 - x)y' - \lambda y = 0$ με $x \in [0, \infty)$. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση e^{-5x} στα δύο πρώτα πολυώνυμα Laguerre: $L_0(x) = 1$ και $L_1(x) = 1 - x$.

Δίνεται η συνθήκη ορθοκανονικοποίησης $\left(L_n, L_m\right) = (n!)^2 \delta_{nm}$.

(1.5M)

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑ 1

a. $\frac{1}{16}y''+\lambda y=0 \Rightarrow y''+16\lambda y=0$. Η εξίσωση είναι σε μορφή Liouville με συνάρτηση βάρους $w(x)=16$.

Η Διαφορική αυτή εξίσωση είναι $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές και άρα θα έχει λύσεις της μορφής $y(x)\approx e^{\rho x}$. Επειδή έχουμε αμιγείς ομογενείς συνοριακές συνθήκες, από το πρώτο θεώρημα Sturm-Liouville προκύπτει ότι αναγκαστικά το πρόβλημα έχει σίγουρα πραγματικές ιδιοτιμές, δηλαδή $\lambda \geq 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $\rho^2+16\lambda=0 \Rightarrow \rho=\pm i4\sqrt{\lambda}$.

Αν θέσω $\lambda=k^2$, η λύση θα έχει τη μορφή $y(x)=ce^{i4kx}+de^{-i4kx}$ και αναπτύσσοντας τα εκθετικά καταλήγουμε με την ακόλουθη μορφή για την λύση της εξίσωσης $y(x)=A\sin(4kx)+B\cos(4kx)$

Από την πρώτη συνοριακή συνθήκη $y(0)=0$ έχουμε $y(0)=A\sin 0+B\cos 0=B=0$.

Άρα $y(x)=A\sin(4kx)$.

Από την δεύτερη συνοριακή συνθήκη $y(L)=0$ έχουμε

$\sin(4kL)=0 \Rightarrow 4k_nL=n\pi, n=1,2,3,.....$ Προσοχή δεν κρατάμε την λύση n=0.

Άρα τελικά $\left.\begin{aligned} y_n(x)&=A_n\sin(4k_nx)\\ k_n&=\frac{n\pi}{4L}\end{aligned}\right\}, n=1,2,...$

Το επόμενο βήμα είναι να κανονικοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις ώστε αυτές να αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Πίρνοντας υπόψη μας το ολοκλήρωμα που δίνεται στην εκφώνηση θα έχουμε

$$(y_n,y_n)=\int_0^L w(x)\|y_n(x)\|^2\,dx=\int_0^L 16A_n^2\sin^2(4k_nx)dx=8A_n^2\int_0^L[1-\cos(8k_nx)]dx$$

$$=8A_n^2\left[L-\frac{1}{8k_n}\sin(8k_nx)\Big|_0^L\right]=8A_n^2\left[L-\frac{1}{8k_n}\sin(\frac{8n\pi}{L}x)\Big|_0^L\right]=8A_n^2L$$

και δεδομένου ότι $(y_n,y_n)=1 \Rightarrow 8A_n^2L=1 \Rightarrow A_n=\frac{1}{\sqrt{8L}}$

Άρα τελικά οι ιδιοσυναρτήσεις θα έχουν την μορφή

$$\left\{ y_n(x)=\frac{1}{\sqrt{8L}}\sin(4k_nx)=\frac{1}{\sqrt{8L}}\sin\frac{n\pi x}{L} \quad ,n=1,2,3,... \right.$$

b. Η συνάρτηση $f(x)=c(x-L)$ αναπτύσσεται στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny_n(x)$.

$$c_n=(y_n,f)=\int_0^L w(x)y_n^*(x)f(x)dx=\int_0^L 16\frac{1}{\sqrt{8L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)c(x-L)dx=$$

$$=\frac{8c}{\sqrt{2L}}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)(x-L)dx=\frac{8c}{\sqrt{2L}}\left[\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx-L\int_0^L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx=-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L=-\frac{L}{n\pi}\left[\cos(n\pi)-\cos 0\right]=-\frac{L}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα κάνω την αλλαγή μεταβλητής $z = \frac{n\pi}{L}x$.

Άρα :

$$\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} z\sin z dz = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\int_0^{n\pi} d(z\cos z) - \int_0^{n\pi}\cos z dz\right]$$

$$= -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[z\cos z\Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi}\cos z dz\right] = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\left(n\pi\cos(n\pi)\right) - \sin z\Big|_0^{n\pi}\right] = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\left(n\pi(-1)^n\right) - 0\right]$$

$$= -\frac{L^2}{n\pi}(-1)^n$$

και τελικά

$$c_n = \left(y_n, f\right) = \frac{8c}{\sqrt{2L}}\left[\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - L\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] =$$
$$= \frac{8c}{\sqrt{2L}}\left[-\frac{L^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{L^2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\right] = \frac{8c}{\sqrt{2L}}\frac{L^2}{n\pi}.$$

ΘΕΜΑ 2

$$a(x) = -x, b(x) = -(1-x)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx} = -\frac{1}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx} = -\frac{1}{x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} = -\frac{1}{x}e^{\ln x - x + c} = A\frac{1}{x}e^{\ln x}e^{-x} = Ae^{-x}$$

$$w(x) = -\mu(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = e^{-5x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)$$

$$c_n = \frac{(L_n, f)}{(L_n, L_n)}$$

Άρα

$$c_0 = \frac{(L_0, f)}{(L_0, L_0)} = (L_0, f) = \int_0^\infty w(x)L_0^*(x)f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}e^{-5x}dx =$$

$$= 1/6$$

$$c_1 = \frac{(L_1, f)}{(L_1, L_1)} = (L_1, f) = \int_0^\infty w(x)L_1^*(x)f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}(1-x)e^{-5x}dx =$$

$$= -1/6\left[e^{-6x}(1-x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-6x}dx\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-6x}(1-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{e^{6x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)'}{(e^{6x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{6e^{6x}} = 0$$

$$c_1 = -1/6\left[0 - 1 + \frac{1}{6}\right] = 5/36$$

$$f(x) = e^{-5x} = c_0L_0 + c_1L_1 = \frac{1}{6}L_0 + \frac{5}{36}L_1$$

ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

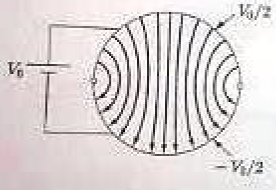
Εξετάσεις Ιουνίου 2011
(16-6-2011)

Επώνυμο: .... **Όνομα:** .... **Α. Μ.** ....

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (3.0 Μ)
Ι. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης $-y'' + y = \lambda y$ με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(\pi) = 0$.
ΙΙ. Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x) = x(x-\pi)$ στις ιδιοσυναρτήσεις του ερωτήματος Ι και να βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος.

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (2.0 Μ)
Ι. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-|x|}$.
ΙΙ. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $g(x) = \delta(x-\pi)\sin(x/2) - \delta(x+\pi)\cos(x)$, όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση δέλτα.

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (3.0 Μ)



Βρείτε τη συνάρτηση του δυναμικού u εντός του κυλινδρικού πυκνωτή του διπλανού σχήματος, λύνοντας την εξίσωση Laplace: $\nabla^2 u = 0$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η επάνω ημιπεριφέρεια του βρίσκεται σε δυναμικό $V_0/2$ ενώ η κάτω, σε δυναμικό $-V_0/2$. Δίνεται ότι σε πολικές συντεταγμένες: $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

<u>ΘΕΜΑ 4</u> (2.0 Μ)
Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση
$y'' + y = 2011, \quad 0 \le x \le \pi/2$
σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Ειδική Πτυχιακή Εξέταση Νοεμβρίου 2011

(10-11-2011)

Επώνυμο: ____________________ **Ονομα:** ____________________ **Α. Μ.** ________

ΘΕΜΑ 1 (3.0 Μ)

I. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης $-y'' + 4y = \lambda y$ με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$.

II. Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x) = x(x-1)$ στις ιδιοσυναρτήσεις του ερωτήματος I και να βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος.

ΘΕΜΑ 2 (2.0 Μ)

I. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-|x|}$.

II. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $g(x) = \delta(x-\pi/2)\sin(x) - \delta(x+\pi/2)\cos(2x)$, όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση δέλτα.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 Μ)

Να επιλυθεί η μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

στο διάστημα $x \in [0, L]$, με συνοριακές συνθήκες: $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ και αρχική συνθήκη $u(x,0) = x$.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 Μ)

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών με τη μέθοδο της συνάρτησης Green:

$y'' + y = 2011, \quad 0 \le x \le \pi$

σε συνδυασμό με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες:

$y(0) = 0, \; y'(\pi) = 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV

Επί πτυχίο Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2012

Επώνυμο: ______________ Όνομα: ______________ Α. Μ. ______

ΘΕΜΑ 1 (2.0 Μ)

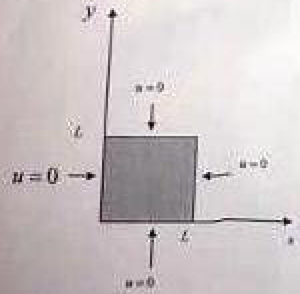
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης $-\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda y$ με συνοριακές συνθήκες $y'(0)=y(1)=0$.

ΘΕΜΑ 2 (3.0 Μ)

I. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)=xe^{-x^2}$.

II. Βρείτε τις τιμές των ολοκληρωμάτων $I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta'(x-3)}{x^2}dx$ και $I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(3x)\cos(\pi x)dx$, όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση δέλτα.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 Μ)



Λύστε την κυματική εξίσωση $\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, στο εσωτερικό του τετραγώνου πλευράς L του σχήματος, σε συνδυασμό με τις αναγραφόμενες συνοριακές συνθήκες καθώς και τις παρακάτω αρχικές συνθήκες:

$u(x,y,0)=4$

$u_t(x,y,0)=0$

ΘΕΜΑ 4 (2.5 Μ)

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u(x,0)=3e^{-x}$$