

ΘΕΜΑ 1 (2.5 M)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$y^{(4)} - 6y''' + 8y'' + 6y' - 9y = 2(\cosh 3x + \cos x) + x$, αν γνωρίζεται ότι μία ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι η $\rho = 3$.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 M)

Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών με την μέθοδο Laplace

A) $\dot{y} + y = 2e^{2t}, y(0) = 1$

B) $\ddot{y} - 4y = f(t), \begin{cases} y(0) = -1 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$ όπου $f(t)$ τυχαία συνάρτηση.

ΘΕΜΑ 3 (1.5 M)

Δείξτε ότι στο δακτύλιο $1 < |z-1| < 2$ ισχύει η ισότητα:

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{-1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

Δίνεται ότι: $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ για $|w| < 1$.

ΘΕΜΑ 4 (1.5 M)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^4 + 1}$$

όπου C είναι ο δρόμος που αποτελείται από το πάνω ημικύκλιο με κέντρο το 0 και ακτίνα 2 και από τη διάμετρό του που βρίσκεται στον πραγματικό άξονα.

ΘΕΜΑ 5 (2 M)

Να αναπτυχθεί σε σειρά ημιτόνων η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ

Πτυχιακή εξέταση Ιουνίου 2010
(21-6-2010)

Επώνυμο: Όνομα: Α. Μ. :

ΘΕΜΑ 1 (1.5 Μ)

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 3z + 2}$ στο δακτύλιο

$1 < |z| < 2$. Δίνεται ότι: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ για $|z| < 1$.

ΘΕΜΑ 2 (1.5 Μ)

Ναδειχθεί ότι:

(α) Η συνάρτηση $u(x, y) = x^2 + 4x - y^2 + 2y$ είναι αρμονική.

(β) Να βρεθεί μια αρμονική συζυγής $v(x, y)$ της παραπάνω συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 3 (2.0 Μ)

Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ σε σειρά Fourier, εάν η περίοδος είναι 2π .

ΘΕΜΑ 4 (3.5 Μ)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$$y'''' - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = (16x + 9)e^{-x} + 2[\sinh x + i \sin x],$$

αν γνωρίζετε ότι μία ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι η $\rho = 1$.

ΘΕΜΑ 5 (1.5 Μ)

Να λυθεί το κάτωθι πρόβλημα αρχικών τιμών με την μέθοδο Laplace

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2\dot{y} = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -1 \\ \ddot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!

ΘΕΜΑ 1 (2.0 M)

Ποια η γενική λύση της $4x^2 y'' + 5y = \ln x$.

ΘΕΜΑ 2 (3.0 M)

Ποια η γενική λύση της $y^{(4)} - y = x^6 + \cos x + \sinh x + e^{-2x}$.

ΘΕΜΑ 3 (2 M)

Να υπολογιστούν τα παρακάτω μιγαδικά ολοκληρώματα κατά μήκος της διαδρομής $|z| = 3$:

$$\oint_{|z|=3} \operatorname{Arg}(z^3) dz, \quad \oint_{|z|=3} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz, \quad \oint_{|z|=3} z^{2010} \exp(-z^2) \sin z^5 dz$$

ΘΕΜΑ 4 (1.5 M)

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 3z + 2}$ στο δακτύλιο

$1 < |z| < 2$. Δίνεται ότι: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ για $|z| < 1$.

ΘΕΜΑ 5 (1.5 M)

Δείξτε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \pi/4$ ισχύει:

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \quad \text{για } 0 < x < \pi$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1 (1.5 M)

Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = \bar{z}(2 - z\bar{z})$$

είναι αναλυτική. Στα σημεία αυτά να βρεθεί και η παράγωγος της f .

ΘΕΜΑ 2 (1.5 M)

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{z \exp(zt)}{(z^2 + 1)^2} dz$$

όπου C ο κύκλος ($|z| = 2$) και t πραγματικός αριθμός.

ΘΕΜΑ 3 (2.0 M)

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \end{cases}$ με περίοδο 8.

ΘΕΜΑ 4 (2 M)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x^2 - 1 + \cos x + xe^{-2x}.$$

ΘΕΜΑ 5 (1.75 M)

Να λυθεί το κάτωθι πρόβλημα αρχικών τιμών με την μέθοδο Laplace

$$y'' + 2y' - 3y = 3e^{-2x} \text{ με αρχικές συνθήκες } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6 (1.25 M)

Δείξτε ότι η γενική λύση της εξίσωσης: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ είναι η

$$y(x) = x^2 (\ln|x| + k) \text{ όπου } k \text{ τυχαία σταθερά.}$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2012
(26-1-2012)

Επώνυμο: Όνομα: Α. Μ.:

• ΘΕΜΑ 1 (2.5 Μ)

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων
$$\begin{cases} 4y_1'' + y_2 = e^{-x} \\ y_1 + 4y_2'' = e^x + x^2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 (2.5 Μ)

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}$.

Αν γνωρίζετε ότι μία ειδική λύση της έχει τη μορφή $y_p(x) = A \sin x + B \cos x$, δείξτε ότι $A=1$ και $B=0$.

Ποια η λύση της διαφορικής εξίσωσης αν γνωρίζετε ότι $y(0) = -2$.

Παρατήρηση: Κάντε όλες τις ενδιάμεσες πράξεις.

• ΘΕΜΑ 3 (1.5 Μ)

Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = 2x(1 - y)$ είναι αρμονική σε κάποιο χωρίο και μετά βρείτε, μία αρμονική συζυγή της $v(x, y)$.

ΘΕΜΑ 4 (1.5 Μ)

Δώστε το ανάπτυγμα σε σειρά Laurent για την παρακάτω συνάρτηση

$$\frac{1}{z^2(1-z)}$$

και προσδιορίστε την περιοχή στην οποία αντιστοιχεί. Δίνεται ότι:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \text{ για } |w| < 1.$$

✓ ΘΕΜΑ 5 (2.0 Μ)

Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$ σε σειρά συνημιτόνων.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!