Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Φεβρουαρίου 2009

1. Χρησιμοποιήστε τις μεταθετικές σχέσεις της στροφορμής, ℓ, για να δείξετε ότι σε μία κατάσταση όπου η προβολή του ℓ στον άξονα z είναι πλήρως καθορισμένη η μέση τιμή της προβολής του ℓ στον άξονα x είναι ίση με μηδέν. (1 μονάδα)

2. Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης Δx για μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού μήκους L, με $V(x)=0$ για $0<x<L$ και $V(x)\to\infty$ διαφορετικά. (1 μονάδα)

3. Η κατάσταση ενός αρμονικού ταλαντωτή κυκλικής συχνότητας ω περιγράφεται κατά τη χρονική στιγμή t=0 από τη κυματοσυνάρτηση (σε μονάδες αρμονικού ταλαντωτή $\hbar = m = \omega = 1$):

$$\psi(x) = N(2x+1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Υπολογίστε τη μέση θέση του ταλαντωτή, ύστερα από χρόνο t αναπτύσσοντας την ψ σε ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις. (2 μονάδες)

4. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$\psi(r,\theta,\varphi) = N\left(\psi_{100} + 2\psi_{211} + \psi_{32,-1}\right)$

Όπου ψ_{100}, ψ_{211}, $\psi_{32,-1}$ είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.

α. Υπολογίστε το Ν.

β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $<\Delta\ell_z>$.

γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.

(2 μονάδες)

5. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως Β κατά τον άξονα χ. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (σπίν πάνω κατά τον z), ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

6. Απαντήστε σύντομα τις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις (με σύντομη αιτιολόγηση):

α) $\psi(x) = Ne^{-\lambda x}$ β) $\psi(x) = Ne^{\lambda x}$ γ) $\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$ δ) $\psi(x) = N\sin(\lambda x)e^{-\lambda|x|}$

Θεωρήστε ότι οι κυματοσυναρτήσεις ορίζονται στο $(-\infty,\infty)$ και ότι τα N, λ είναι πραγματικά και θετικά.

2. Αποδείξτε ότι δυο κυματοσυναρτήσεις ψ και Ψ που διαφέρουν κατά μία σταθερή φάση – δηλαδή $\Psi(x) = e^{ia}\psi(x)$ - είναι φυσικά ισοδύναμες. Ισχύει το ίδιο αν η φάση a δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το x;

3. Μια δέσμη σωματιδίων άγνωστης ενέργειας, πέφτει πάνω σε ένα σκαλοπάτι δυναμικού "ύψους" V_0=3 eV και το ένα ένατο από αυτά ανακλάται και επιστρέφει. Ποια είναι η ενέργεια τους;
(2 μονάδες)

Δίνεται ότι $\psi_{100}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$, , $\psi_{211}(r,\theta,\varphi) = -\dfrac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sin\theta e^{i\varphi}$, $\psi_{32,-1}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$, *με* a_0 *την ακτίνα Bohr. Σε σφαιρικές συντεταγμένες* $\ell^2 = -\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Επίσης, οι νορμαλισμένες κυματοσυναρτήσεις της θεμελιώδους στάθμης και της πρώτης διεγερμένης στάθμης ενός αρμονικού ταλαντωτή κυκλικής συχνότητας* ω *έχουν τη μορφή* $\psi_0(x) = \left(\dfrac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\dfrac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ *και* $\psi_1(x) = \left(2\dfrac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x\psi_0(x)$, *αντίστοιχα. Τέλος, οι μήτρες του Pauli είναι* $\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}dx = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n = 0,1,2,\ldots$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\lambda x^2}dx = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n = 1,2,3,\ldots$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda > 0$.

$\int_0^L x^2\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx = \dfrac{L^3}{6} - \dfrac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Ιουνίου 2009

1. Χρησιμοποιήστε τις μεταθετικές σχέσεις της στροφορμής, ℓ, για να δείξετε ότι σε μία κατάσταση όπου η προβολή του ℓ στον άξονα z είναι πλήρως καθορισμένη η μέση τιμή της προβολής του ℓ στον άξονα x είναι ίση με μηδέν. (1 μονάδα)

2. Κατά τη χρονική στιγμή t=0, η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x) = N\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Α) Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων ενέργειας, Ε, του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση και ποιά η πιθανότητα του καθενός;

Β) Υπολογίστε την $\langle E \rangle$ και ΔΕ σε αυτή την κατάσταση. Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συνάρτηση μόνο της ενέργειας E_1 της θεμελιώδους καταστάσεως.

Γ) Ποια είναι η μέση θέση του σωματιδίου κατά τη χρονική στιγμή t=0 και ύστερα από χρόνο t;

Δίδεται ότι μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού μήκους L, με $V(x) = 0$ για $0 < x < L$ και $V(x) \to \infty$ διαφορετικά.

(2 μονάδες)

3. Στην κατάσταση 210 του ατόμου του Υδρογόνου, η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου έχει τη μορφή:

$$\psi_{210} = Nre^{-r/2}\cos\vartheta \qquad \text{(A.U.)}.$$

Υπολογίστε τα εξής:

Α) Τη μέση απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα.

Β) Τη μέση δυναμική και τη μέση κινητική του ενέργεια σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV).

Γ) Την πιθανότητα να το βρούμε μέσα σε ένα διπλό κώνο γωνίας 60^{o} γύρω από τον άξονα z.

(2 μονάδες)

4. Δείξτε ότι σε μια κατάσταση καθορισμένης προβολής του σπιν (s=½) κατά τον άξονα z – ας πούμε σπιν ``πάνω''- οι μέσες τιμές των δυο άλλων συνιστωσών του (s_x και s_y) είναι ίσες με το μηδέν. Τι συμβαίνει με τις αντίστοιχες αβεβαιότητες;

(2 μονάδες)

5. Απαντήστε σύντομα τις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Στη Θεωρία της Σχετικότητας η σχέση ενέργειας ορμής είναι: $E^2=c^2p^2+m^2c^4$
Γράψτε την μονοδιάστατη ελεύθερη κυματική εξίσωση για αυτή την περίπτωση.

2. Από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις (με σύντομη αιτιολόγηση):

α) $\psi(x) = Ne^{-\lambda x}$ β) $\psi(x) = Ne^{\lambda x}$ γ) $\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$ δ) $\psi(x) = N\sin(\lambda x)e^{-\lambda|x|}$

Θεωρήστε ότι οι κυματοσυναρτήσεις ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$ και ότι τα N, λ είναι πραγματικά και θετικά.

3. Αποδείξτε ότι δυο κυματοσυναρτήσεις ψ και Ψ που διαφέρουν κατά μία σταθερή φάση – δηλαδή $\Psi(x) = e^{ia}\psi(x)$ - είναι φυσικά ισοδύναμες. Ισχύει το ίδιο αν η φάση a δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το x;

4. Κάποιος ισχυρίζεται ότι μέτρησε ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια, και τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής ενός σωματιδίου. Τον πιστεύετε;

5. Δυο πανομοιότυπα σωματίδια τοποθετούνται το ένα μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι και το άλλο μέσα σε ένα πεπερασμένο πηγάδι δυναμικού του ιδίου πλάτους. Ποιο από τα δυο θα έχει μικρότερη ενέργεια θεμελιώδους στάθμης;

6. Μια δέσμη σωματιδίων άγνωστης ενέργειας, πέφτει πάνω σε ένα σκαλοπάτι δυναμικού "ύψους" V_0=3 eV και το ένα ένατο από αυτά ανακλάται και επιστρέφει. Ποια είναι η ενέργεια τους;
(3 μονάδες)

Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες $\ell^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Τέλος, $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n = 0,1,2,...$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n = 1,2,3,...$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda > 0$.

$\int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου 2009

1. Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη φυσικών μεγεθών μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια και ποια όχι:

$$(x, \ell_x), \quad (x, \ell_y), \quad (p_x, \ell_z), \quad (\ell_x, \ell_y), \quad (\ell_z, \ell^2)$$

Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης γράψτε και την αντίστοιχη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. (2 μονάδες)

2. Κατά τη χρονική στιγμή t=0, η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x) = N \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Α) Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων ενέργειας, Ε, του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση και ποιά η πιθανότητα του καθενός;
Β) Υπολογίστε την $\langle E \rangle$ και ΔE σε αυτή την κατάσταση. Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συνάρτηση μόνο της ενέργειας E_1 της θεμελιώδους καταστάσεως.
Γ) Ποια είναι η μέση θέση του σωματιδίου κατά τη χρονική στιγμή t=0 και ύστερα από χρόνο t;

Δίδεται ότι μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού μήκους L, με $V(x) = 0$ για $0 < x < L$ και $V(x) \to \infty$ διαφορετικά.
(2 μονάδες)

3. Επανειλημμένες μετρήσεις της ενέργειας στην ίδια φυσική κατάσταση ενός αρμονικού ταλαντωτή έδωσαν μόνο τις δύο τιμές για την ενέργεια, $E_0=1/2$ και $E_1=3/2$ με συχότητες $P_0=1/3$ και $P_1=2/3$.
Α) Γράψτε την πιο γενική κατάσταση του ταλαντωτή που ανταποκρίνεται στα δεδομένα αυτών των μετρήσεων.
Β) Προσδιορίστε επακριβώς αυτή την κατάσταση αν σας δίδεται επιπλέον ένα απο τα ακόλουθα δεδομένα:
i) $\langle x \rangle=0$ ii) $\langle x \rangle=1/3$ iii) $\langle p \rangle=0$
(2 μονάδες)

4. Η κυματοσυνάρτηση της κατάστασης 2s του ατόμου του Υδρογόνου έχει τη μορφή (σε ατομικές μονάδες):

$$\psi = \psi_{2s} = N\left(1 - \frac{r}{2}\right)e^{-r/2}$$

Υπολογίστε τη μέση απόσταση του ηλεκτρονίου απο τον πυρήνα, καθώς και τη μέση κινητική του ενέργεια (σε eV). (2 μονάδες)

5. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα x. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (σπίν πάνω κατά τον z). ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες $\ell^2=-\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Τέλος, $\sin^3 x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}dx=\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n=0,1,2,\ldots,$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2}dx=\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n=1,2,3,\ldots.$ *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda>0$.

$\int_0^L x^2\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx=\dfrac{L^3}{6}-\dfrac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Φεβρουαρίου 2010

1. Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη φυσικών μεγεθών μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια και ποια όχι:

$$(x, \ell_x), \quad (x, \ell_y), \quad (p_x, \ell_z), \quad (\ell_x, \ell_y), \quad (\ell_z, \ell^2)$$

Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης γράψτε και την αντίστοιχη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. (1 μονάδα)

2. Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες ενέργειες για ένα σωματίδιο παγιδευμένο σε ένα κύβο πλευράς L. (2 μονάδες)

3. Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας E > 0 προσπίπτει από τα αριστερά στο δέλτα πηγάδι δυναμικού $V(x) = -g\delta(x)$. Ποια είναι η πιθανότητα να ανακλαστεί; (2 μονάδες)

4. Επανειλημμένες μετρήσεις της ενέργειας στην ίδια φυσική κατάσταση ενός αρμονικού ταλαντωτή έδωσαν μόνο τις δύο τιμές για την ενέργεια, $E_0=1/2$ και $E_1=3/2$ με συχνότητες $P_0=1/3$ και $P_1=2/3$.
A) Γράψτε την πιο γενική κατάσταση του ταλαντωτή που ανταποκρίνεται στα δεδομένα αυτών των μετρήσεων.
B) Προσδιορίστε επακριβώς αυτή την κατάσταση αν σας δίδεται επιπλέον ένα απο τα ακόλουθα δεδομένα:
i) $\langle x\rangle=0$ ii) $\langle x\rangle=1/3$ iii) $\langle p\rangle=0$ iv) $\langle p\rangle=\sqrt{2}/3$
(2 μονάδες)

5. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:
$\psi = N\left(\psi_{100} + \psi_{211} + 2\psi_{32,-1}\right)$
Όπου ψ_{100}, ψ_{210}, $\psi_{32,-1}$ είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.
α. Υπολογίστε το N
β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $\Delta\ell_z$.
γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
(2 μονάδες)

6. Η κατάσταση σπιν ενός σωματιδίου με s=1/2 περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από το διάνυσμα στήλης: $X = N\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix}$ Ποιες είναι οι πιθανότητες να βρούμε το σωματίδιο με σπιν +1/2 ή -1/2 κατα τον άξονα x; (1 μονάδες)

Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες $\ell^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda > 0$.

$\int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Ιουνίου 2010

1. Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη φυσικών μεγεθών μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια και ποια όχι:

$$(x, \ell_x), \quad (x, \ell_y), \quad (p_x, \ell_z), \quad (\ell_x, \ell_y), \quad (\ell_z, \ell^2)$$

Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης γράψτε και την αντίστοιχη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. (2 μονάδες)

2. Κατά τη χρονική στιγμή t=0, η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x) = N\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Α) Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων ενέργειας, Ε, του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση και ποιά η πιθανότητα του καθενός;

Β) Υπολογίστε την $\langle E\rangle$ και ΔΕ σε αυτή την κατάσταση. Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συνάρτηση μόνο της ενέργειας E_1 της θεμελιώδους καταστάσεως.

Γ) Ποια είναι η μέση θέση του σωματιδίου κατά τη χρονική στιγμή t=0 και ύστερα από χρόνο t;

Δίδεται ότι μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού μήκους L, με $V(x)=0$ για $0<x<L$ και $V(x)\to\infty$ διαφορετικά.

(2 μονάδες)

3. Επανειλημμένες μετρήσεις της ενέργειας στην ίδια φυσική κατάσταση ενός αρμονικού ταλαντωτή έδωσαν μόνο τις δύο τιμές για την ενέργεια, $E_0=1/2$ και $E_1=3/2$ με συχότητες $P_0=1/4$ και $P_1=3/4$.

Α) Γράψτε την πιο γενική κατάσταση του ταλαντωτή που ανταποκρίνεται στα δεδομένα αυτών των μετρήσεων.

Β) Προσδιορίστε επακριβώς αυτή την κατάσταση αν σας δίδεται επιπλέον ένα απο τα ακόλουθα δεδομένα:

i) $\langle x\rangle=0$ ii) $\langle x\rangle=1/3$ iii) $\langle p\rangle=0$

(2 μονάδες)

4. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N\left(\psi_{100} + 2\psi_{211} + \psi_{32,-1}\right)$$

Όπου ψ_{100}, ψ_{211}, $\psi_{32,-1}$ είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.

α. Υπολογίστε το N.

β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $<\Delta\ell_z>$.
γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
(2 μονάδες)

5. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα x. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (σπίν πάνω κατά τον z), ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

Δίνεται ότι $\psi_{100}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$, , $\psi_{211}(r,\theta,\varphi)=-\dfrac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sin\theta e^{i\varphi}$,
$\psi_{32,-1}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$, *με* a_0 *την ακτίνα Bohr. Σε σφαιρικές συντεταγμένες*
$\ell^2=-\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες*
$\ell^2=-\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι*
$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.
Τέλος, $\sin^3 x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}dx=\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n=0,1,2,...,$ $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\lambda x^2}dx=\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n=1,2,3,...$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda>0$.

$\int_0^L x^2\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx=\dfrac{L^3}{6}-\dfrac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου 2010

1. Χρησιμοποιήστε τις μεταθετικές σχέσεις της στροφορμής, ℓ, για να δείξετε ότι σε μία κατάσταση όπου η προβολή του ℓ στον άξονα z είναι πλήρως καθορισμένη η μέση τιμή της προβολής του ℓ στον άξονα x είναι ίση με μηδέν. (1 μονάδα)

2. Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες ενέργειες για ένα σωματίδιο παγιδευμένο σε ένα κύβο πλευράς L. (1 μονάδες)

3. Ένα σωματίδιο μάζας m εκτελεί τρισδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Που είναι γνωστό ως ο τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του και δώστε το ενεργειακό διάγραμμα για τις τρεις πρώτες στάθμες δείχνοντας και τον εκφυλισμό της καθεμίας. Δουλέψτε στο σύστημα μονάδων όπου

$$m = \omega = \frac{h}{2\pi} = 1$$

(2 μονάδες)

4. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N\left(\psi_{100} + 2\psi_{211} + \psi_{32,-1}\right)$$

Όπου ψ_{100}, ψ_{211}, $\psi_{32,-1}$ είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.

α. Υπολογίστε το N.

β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $<\Delta\ell_z>$.

γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης. (2 μονάδες)

5. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα x. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (σπίν κάτω κατά τον z), ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

6. Α. Από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις:

α) $\psi(x) = Ne^{-\lambda x}$ β) $\psi(x) = Ne^{\lambda x}$ γ) $\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$ δ) $\psi(x) = N\sin xe^{-|x|}$

Β. Αποδείξτε ότι δυο κυματοσυναρτήσεις ψ και Ψ που διαφέρουν κατά μία σταθερή φάση – δηλαδή $\Psi(x)=e^{ia}\psi(x)$ - είναι φυσικά ισοδύναμες. Ισχύει το ίδιο αν η φάση a δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το x;

Γ. Κάποιος ισχυρίζεται ότι μέτρησε ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια, και τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής ενός σωματιδίου. Τον πιστεύετε;

Δ. Δυο πανομοιότυπα σωματίδια τοποθετούνται το ένα μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι και το άλλο μέσα σε ένα πεπερασμένο πηγάδι δυναμικού του ιδίου πλάτους. Ποιο από τα δυο θα έχει μικρότερη ενέργεια θεμελιώδους στάθμης;

Ε. Μια δέσμη σωματιδίων άγνωστης ενέργειας, πέφτει πάνω σε ένα σκαλοπάτι δυναμικού ``ύψους`` V_0=3ev και το ένα ένατο από αυτά ανακλάται και επιστρέφει. Ποια είναι η ενέργεια τους;

(2 μονάδες)

Δίνεται ότι $\psi_{100}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$, $\psi_{211}(r,\theta,\varphi)=-\dfrac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sin\theta e^{i\varphi}$, $\psi_{32,-1}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\dfrac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$, *με* a_0 *την ακτίνα Bohr. Σε σφαιρικές συντεταγμένες* $\ell^2=-\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες* $\ell^2=-\hbar^2\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\hbar^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι* $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Τέλος, οι νορμαλισμένες κυματοσυνάρτησεις της θεμελιώδους στάθμης και της πρώτης διεγερμένης στάθμης ενός αρμονικού ταλαντωτή κυκλικής συχνότητας ω έχουν τη μορφή $\psi_0(x)=\left(\dfrac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\dfrac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ *και* $\psi_1(x)=\left(2\dfrac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x\psi_0(x)$, *αντίστοιχα.*

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}dx=\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n=0,1,2,\ldots$, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\lambda x^2}dx=\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n=1,2,3,\ldots$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda>0$.

$$\int_0^L x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{L^3}{6}-\frac{L^3}{4n^2\pi^2}$$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Φεβρουαρίου 2011

1. Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη φυσικών μεγεθών μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια και ποια όχι:

$$(x, \ell_x),\quad (x, \ell_y),\quad (p_x, y),\quad (\ell_x, \ell_y),\quad (\ell_z, \ell^2)$$

Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης γράψτε και την αντίστοιχη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. (1 μονάδα)

2. Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης Δx για μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθου πηγαδιού μήκους L, με $V(x) = 0$ για $0 < x < L$ και $V(x) \to \infty$ διαφορετικά. (1 μονάδα)

3. Μια δέσμη σωματιδίων άγνωστης ενέργειας, πέφτει πάνω σε ένα σκαλοπάτι δυναμικού ``ύψους`` V_0=3eV και το ένα ένατο από αυτά ανακλάται και επιστρέφει. Ποια είναι η ενέργεια τους; Πρέπει να αποδείξετε τον τύπο για τον συντελεστή ανάκλασης. (1 μονάδα)

4. Ένα σωματίδιο μάζας m εκτελεί δισδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

που είναι γνωστό ως ο δισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του και δώστε το ενεργειακό διάγραμμα για τις τρεις πρώτες στάθμες δείχνοντας και τον εκφυλισμό της καθεμίας. Δουλέψτε στο σύστημα μονάδων όπου $m = \omega = \frac{h}{2\pi} = 1$
(2 μονάδες)

5. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(r,\theta,\phi) = N(\psi_{400} + \psi_{210} + \psi_{321})$$

Όπου ψ_{400}, ψ_{210}, ψ_{321} είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.

α. Υπολογίστε το N.

β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $<\Delta\ell_z>$.

γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης. (1 μονάδα)

6. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα x. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (σπίν κάτω κατά τον z), ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

7. Α. Από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις:

α) $\psi(x) = Ne^{-\lambda x}$ β) $\psi(x) = Ne^{\lambda x}$ γ) $\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$ δ) $\psi(x) = N\sin xe^{-|x|}$

Β. Αποδείξτε ότι δυο κυματοσυναρτήσεις ψ και Ψ που διαφέρουν κατά μία σταθερή φάση – δηλαδή $\Psi(x) = e^{ia}\psi(x)$ - είναι φυσικά ισοδύναμες. Ισχύει το ίδιο αν η φάση a δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το x;

Γ. Κάποιος ισχυρίζεται ότι μέτρησε ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια, και τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής ενός σωματιδίου. Τον πιστεύετε;

Δ. Δυο πανομοιότυπα σωματίδια τοποθετούνται το ένα μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι και το άλλο μέσα σε ένα πεπερασμένο πηγάδι δυναμικού του ιδίου πλάτους. Ποιο από τα δυο θα έχει μικρότερη ενέργεια θεμελιώδους στάθμης;
(2 μονάδες)

Δίνεται ότι οι μήτρες του Pauli είναι $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Οι νορμαλισμένες κυματοσυνάρτησεις της θεμελιώδους στάθμης και της πρώτης διεγερμένης στάθμης ενός αρμονικού ταλαντωτή κυκλικής συχνότητας ω *έχουν τη μορφή* $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ *και* $\psi_1(x) = \left(2\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\psi_0(x)$, *αντίστοιχα.*

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda > 0$.

$\int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4n^2\pi^2}$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξεταστική περίοδος Ιανουαρίου 2013

1. Χρησιμοποιήστε τις μεταθετικές σχέσεις της στροφορμής, ℓ, για να δείξετε ότι σε μία κατάσταση όπου η προβολή του ℓ στον άξονα z είναι πλήρως καθορισμένη,η μέση τιμή της προβολής του ℓ στον άξονα x είναι ίση με μηδέν. (1 μονάδα)

2. Γράψτε την χρονεξαρτημένη εξίσωση Schrodinger για τα ακόλουθα φυσικά συστήματα:
Α) Σωματίδιο μάζας m που εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση της δύναμης F = -kx.
Β) Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου θεωρώντας ότι το πρωτόνιο είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων.
Γ) Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου που εκτίθεται επιπλέον και σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως Ε κατά τον άξονα z. (0.5 μονάδα)

3. Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας E > 0 προσπίπτει από τα αριστερά στο δέλτα πηγάδι δυναμικού $V(x) = -g\delta(x)$. Ποια είναι η πιθανότητα να ανακλαστεί; (1 μονάδα)

4. Ένα σωματίδιο μάζας m εκτελεί δισδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

που είναι γνωστό ως ο δισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του και δώστε το ενεργειακό διάγραμμα για τις τρεις πρώτες στάθμες δείχνοντας και τον εκφυλισμό της καθεμίας. Δουλέψτε στο σύστημα μονάδων όπου

$$m = \omega = \frac{h}{2\pi} = 1$$

(1.5 μονάδες)

5. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται σε μια ορισμένη στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(r,\theta,\phi) = N(\psi_{300} + \psi_{210} + 3\psi_{32-1})$$

Όπου ψ_{300}, ψ_{210}, ψ_{32-1} είναι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.
α. Υπολογίστε το Ν.
β. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $<\ell^2>$, $<\ell_z>$, $<E>$, και $<\Delta\ell_z>$.
γ. Γράψτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης. (2 μονάδες)

6. Ένα σωματίδιο με σπίν ½ και γυρομαγνητικό λόγο γ (>0) βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως Β κατά τον άξονα **y**. Αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 η κατάσταση του σωματιδίου περιγραφόταν από το διάνυσμα: $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (σπίν πάνω κατά τον z). Ποια θα ήταν η κατάσταση του ύστερα από χρόνο t και ποια η πιθανότητα να το βρούμε με σπίν πάνω ή κάτω κατά τον ίδιο άξονα. (2 μονάδες)

7. Δύο σωματίδια με σπιν s_1=3/2 και s_2=7/2 αλληλεπιδρούν σύμφωνα με τη Χαμιλτονιανή

$$H = A\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

Όπου A μία δεδομένη σταθερά. Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος καθώς και το βαθμό εκφυλισμού της καθεμιάς.
(2 μονάδες)

Σε σφαιρικές συντεταγμένες $\ell^2 = -\hbar^2 \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2 \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Δίνεται ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες* $\ell^2 = -\hbar^2 \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2 \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ *και* $\ell_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. *Επίσης, οι μήτρες του Pauli είναι* $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *και* $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, *για* $n = 0,1,2,\ldots,$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, *για* $n = 1,2,3,\ldots$. *Σε όλα τα ολοκληρώματα* $\lambda > 0$.