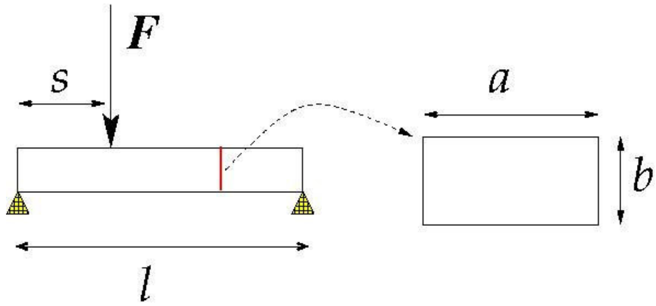
Τμήμα Επιστήμης των Υλικών — Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Ιουνίου 2011 — Ημερομηνία : 25-6-2011

ΘΕΜΑ 1 (2.5 Μ)

Δίνεται ομογενής αμφίπακτή δοκός μήκους ℓ και ορθογώνιου προφίλ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι ασκείται δύναμη $\vec{F}$ σε απόσταση s από το αριστερό της άκρο. Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της.



ΘΕΜΑ 2 (2.5 Μ)

Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή

$$\sigma(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & z^2 \\ y & z^2 & x \end{pmatrix}$$

Α) Στο σημείο με συντεταγμένες (1,0,1) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $2x-3y+2z=1$; Ποιο το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης στο σημείο αυτό;

Β) Ποιες οι κύριες τιμές τάσης στο σημείο (1,1,1) και ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων;

ΘΕΜΑ 3 (5 Μ)

Δίνεται γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο (π.χ. O-C-O). Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων περιγράφονται από δυναμικό Leonard-Jones $V_{LJ}(r)=\frac{c_1}{r^{12}}-\frac{c_2}{r^6}$ όπου c_1, c_2 σταθερές και r η μεταξύ τους απόσταση.

Α) Σχεδιάστε το δυναμικό. Ποια η θέση ισορροπίας;

Β) Ποιοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης; (σχολιάστε τους).

Γ) Ποια η χρονική εξάρτηση της μετατόπισης κάθε ατόμου συναρτήσει των μαζών τους και των σταθερών c_1, c_2.

Δ) Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό του Lagrange

Ε) Γράψτε τις κανονικές εξισώσεις του Hamilton

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

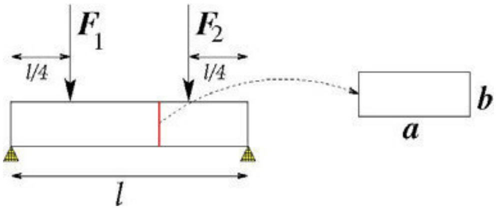
Καλή Επιτυχία

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών | Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Ιουνίου 2011 | Ημερομηνία : 6-7-2011

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (2 M)

Δίνεται ομογενής αμφίπακτή δοκός μήκους ℓ και ορθογώνιου προφίλ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι ασκούνται δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, ίσου μέτρου F, σε απόσταση $\ell/4$ από τα δύο άκρα. Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της.



<u>ΘΕΜΑ 2</u> (3.5 M)

Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή

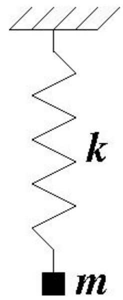
$$\sigma(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & z^2 \\ y & z^2 & x \end{pmatrix}$$

Α) Στο σημείο με συντεταγμένες (1,0,1) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $x^2-2yz=1$; Ποιο το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης στο σημείο αυτό;

Β) Ποιες οι κύριες τιμές τάσης στο σημείο (2,1,2) και ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων; Ποιος ο αντίστοιχος πίνακας στροφής;

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (2 M)

Έστω σώμα μάζας m που βρίσκεται στην άκρη ελατηρίου σταθεράς k, που έχει στερεωμένο το άνω άκρο του όπως φαίνεται στο σχήμα, και εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση υπό τη δύναμη της βαρύτητας. Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Lagrange βρείτε την χρονική εξάρτηση της μετατόπισης του από την θέση ισορροπίας αν γνωρίζετε ότι την χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και έχει αρχική ταχύτητα υ_0.



<u>ΘΕΜΑ 4</u> (2.5 M)

Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται μέσα στο κεντρικό δυναμικό που σχηματίζουν τέσσερα εντελώς όμοια μεταξύ τους ελκτικά κέντρα. Τα κέντρα αυτά βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο xOy και έχουν συντεταγμένες (α,α), (α,-α), (-α,-α) και (-α,α) αντίστοιχα. Το δυναμικό καθενός από τα κέντρα είναι της μορφής $V(r)=-Ar$ όπου A θετική σταθερά και r η απόσταση του ελκτικού κέντρου από τη μάζα. Ποιες οι εξισώσεις κίνησης της μάζας για μικρές αποκλίσεις από το σημείο ισορροπίας;

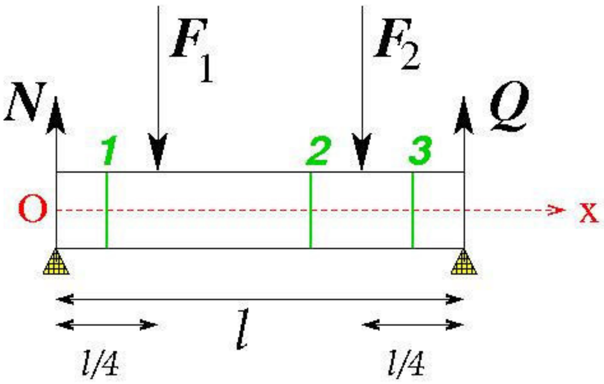
Υπόδειξη: κάντε χρήση της συμμετρίας του προβλήματος.

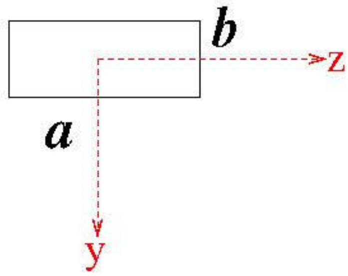
Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1

Στη δοκό θα ασκούνται εκτός των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και δύο δυνάμεις $\vec{N},\vec{G}$ στα δύο άκρα της που είναι πακτωμένα όπως φαίνεται στο σχήμα. Προφανώς τόσο η $\vec{N}$ όσο και η $\vec{G}$ θα έχουν φορά αντίθετη από τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.





Λόγω στατικής ισορροπίας πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων να ισούται με μηδέν και συνεπώς

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}=0 \Rightarrow F_1+F_2-N-G=0 \Rightarrow G+N=F_1+F_2=2F$ όπου λάβαμε υπόψη μας ότι οι δύο εξωτερικές δυνάμεις έχουν το ίδιο μέτρο.

Επίσης το άθροισμα των ροπών σε κάθε σημείο πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν λόγω στατικής ισορροπίας. Στο αριστερό πακτωμένο άκρο θα έχω

$$N\times 0-F_1\frac{\ell}{4}-F_2\frac{3\ell}{4}+G\ell=0 \Rightarrow G=F_1\frac{1}{4}+F_2\frac{3}{4}=F\frac{1}{4}+F\frac{3}{4}=F\,.$$

Συνεπώς $G+N=2F \Rightarrow N=F$.

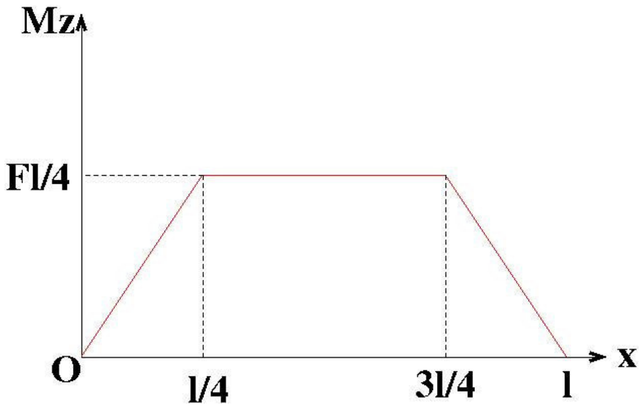
Για να βρούμε που έχουμε την μέγιστη τάση πρέπει να βρούμε την κατανομή καταρχάς των ροπών.

Αν πάρω μία κάθετη τομή πριν το σημείο που ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$ $(x<\frac{\ell}{4})$ στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται μόνο η δύναμη $\vec{N}$ και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι $M_z=Nx=Fx$ και αυξάνεται με το x (Το x είναι η απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού). Στο σχήμα συμβολίζεται με μία κάθετη πράσινη γραμμή και το νούμερο 1.

Αν τώρα η διατομή είναι ανάμεσα στα σημεία που ασκούνται οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ $(\frac{\ell}{4}<x<\frac{3\ell}{4})$ στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται η δύναμη $\vec{N}$ και η δύναμη $\vec{F}_1$, που εξασκούν ροπές αντίθετης κατεύθυνσης, και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι $M_z=Nx-F_1(x-\frac{\ell}{4})=Fx-F(x-\frac{\ell}{4})=F\frac{\ell}{4}$ και η ροπή είναι σταθερή. Στο σχήμα συμβολίζεται με μία κάθετη πράσινη γραμμή και το νούμερο 2.

Αν τώρα η διατομή είναι ανάμεσα μετά το σημείο που ασκείται η $\vec{F}_2$ ($x > \frac{3\ell}{4}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται η δύναμη $\vec{N}$, η δύναμη $\vec{F}_1$ και η δύναμη $\vec{F}_2$, και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι
$M_z = Nx - F_1(x-\frac{\ell}{4}) - F_2(x-\frac{3\ell}{4}) = Fx - F(x-\frac{\ell}{4}) - F(x-\frac{3\ell}{4}) = F(\ell - x)$ και η ροπή μειώνεται με το x. Στο σχήμα συμβολίζεται με μία κάθετη πράσινη γραμμή και το νούμερο 3.

Η εξάρτηση της ροπής από την απομάκρυνση από το αριστερό άκρο της δοκού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Την μέγιστη τιμή της συνεπώς η ροπή την παίρνει όταν η διατομή βρίσκεται ανάμεσα στα δύο σημεία που ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ($\frac{\ell}{4} \le x \le \frac{3\ell}{4}$) όπου $M_z = \frac{F\ell}{4}$.

Εφόσον έχω ορθογώνια διατομή η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z (κοίτα σχήμα για ορισμούς συντεταγμένων) θα είναι

$$I_{zz} = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz = \left(\int_{-a/2}^{a/2} dz\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy\right) = a\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=-b/2}^{y=b/2} = \frac{ab^3}{12}.$$

Η ορθή τάση για $\frac{\ell}{4} \le x \le \frac{3\ell}{4}$ θα είναι συνεπώς

$$\sigma_{xx} = y\frac{M_z}{I_{zz}} = y\frac{F\ell/4}{ab^3/12} = y\frac{3F\ell}{ab^3}.$$

Η μέγιστη ορθή τάση δίνεται στο πάνω και κάτω άκρο όπου $y = \pm\frac{b}{2}$ και η τάση γίνεται

$\sigma_{xx}^{\max} = \pm\frac{b}{2}\frac{3F\ell}{ab^3} = \pm\frac{3F\ell}{2ab^2}$ και ασκείται σε όλα τα σημεία που έχουν συντεταγμένες

$$x \in \left[\frac{\ell}{4}, \frac{3\ell}{4}\right], y = \pm\frac{b}{2}, z \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

ΘΕΜΑ 2Α

Η συνάρτηση που περιγράφει το επίπεδο είναι η $f(x,y,z) = x^2 - 2yz - 1 = 0$.
Το κάθετο διάνυσμα θα είναι το

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z = (2x)\hat{u}_x - (2z)\hat{u}_y - (2y)\hat{u}_z$$

όπου $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα.
Στο σημείο (1,0,1) θα έχουμε

$$\vec{\nabla} f(1,0,1) = 2\hat{u}_x - 2\hat{u}_y$$

Το κάθετο μοναδιαίο στην επιφάνεια θα είναι το

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} f(1,0,1)}{\left|\vec{\nabla} f(1,0,1)\right|} = \frac{2\hat{u}_x - 2\hat{u}_y}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{2\hat{u}_x - 2\hat{u}_y}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_y .$$

Ο τανυστής τάσεων στο σημείο αυτό θα είναι επίσης

$$\sigma(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ και συνεπώς για το διάνυσμα τάσης θα έχω

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

και θα είναι το

$$\vec{S}_{\hat{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_z .$$

Για το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης θα έχω

$$|\vec{\sigma}_{\hat{n}}| = \vec{S}_{\hat{n}}\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}_y + 0\hat{u}_z\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}0 = 1$$

$$\left|\vec{S}_{\hat{n}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$|\vec{\tau}_{\hat{n}}| = \sqrt{\left|\vec{S}_{\hat{n}}\right|^2 - |\vec{\sigma}_{\hat{n}}|^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ΘΕΜΑ 2Β

Στο (2,1,2) ο τανυστής της τάσης θα είναι $\sigma(2,1,2)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&4\\1&4&2\end{pmatrix}$

Για να βρούμε τις κύριες τιμές του λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det\left(\sigma-\sigma_i I\right)=0\Rightarrow\det\begin{pmatrix}2-\sigma_i&0&1\\0&2-\sigma_i&4\\1&4&2-\sigma_i\end{pmatrix}=0\Rightarrow(2-\sigma_i)\begin{vmatrix}2-\sigma_i&4\\4&2-\sigma_i\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&2-\sigma_i\\1&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(2-\sigma_i)\left[(2-\sigma_i)^2-16\right]-(2-\sigma_i)=0\Rightarrow(2-\sigma_i)\left[(2-\sigma_i)^2-16-1\right]=0\Rightarrow(2-\sigma_i)(\sigma_i^2-4\sigma_i-13)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2-\sigma_i=0\\\sigma_i^2-4\sigma_i-13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_I=2\\\sigma_i^2-4\sigma_i-13=0\end{cases}$$

Για το $\sigma_i^2-4\sigma_i-13=0$ θα έχουμε

$$\Delta=(-4)^2-4(-13)=68$$

$$\sigma_i=\frac{-(-4)\pm\sqrt{68}}{2}=2\pm\sqrt{17}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_{II}=2-\sqrt{17}\\\sigma_{III}=2+\sqrt{17}\end{cases}$$

Οι αναλλοίωτες του τανυστή τάσεων παίρνουν τιμές που δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Συνεπώς χρησιμοποιώντας το κύριο σύστημα συντεταγμένων όπου ο τανυστής τάσεων είναι διαγώνιος και έχει την πιο απλή δυνατή μορφή, οι αναλλοίωτες θα είναι

$$J_1=\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}=2+(2-\sqrt{17})+(2+\sqrt{17})=6$$

$$J_2=\sigma_I\sigma_{II}+\sigma_I\sigma_{III}+\sigma_{II}\sigma_{III}=2\times(2-\sqrt{17})+2\times(2+\sqrt{17})+(2-\sqrt{17})\times(2+\sqrt{17})=-5$$

$$J_3=\sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}=2\times(2-\sqrt{17})\times(2+\sqrt{17})=-26\,.$$

Για την κύρια τιμή $\sigma_I=2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$\left(\sigma-\sigma_I I\right)X_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2-\sigma_I&0&1\\0&2-\sigma_I&4\\1&4&2-\sigma_I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}\\R_{12}\\R_{13}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&4\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}\\R_{12}\\R_{13}\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}R_{13}\\4R_{13}\\R_{11}+4R_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}R_{13}=0\\R_{11}=-4R_{12}\end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε το 1ο και το 2ο στοιχείο του ιδιοδιανύσματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$\left(R_{11}\right)^2+\left(R_{12}\right)^2+\left(R_{13}\right)^2=1\Rightarrow(-4R_{12})^2+\left(R_{12}\right)^2=1\Rightarrow17\left(R_{12}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow R_{12}=\pm\,{}^{1}\!/\!_{\sqrt{17}}$$

Διαλέγουμε την αρνητική τιμή (αν διαλέγαμε την θετική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1). Συνεπώς
$R_{12} = -\,{}^{1}\!\big/_{\sqrt{17}}\,, R_{13} = -4R_{12} = {}^{4}\!\big/_{\sqrt{17}}\,.$

Οπότε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{4}\!\big/_{\sqrt{17}} \\ -\,{}^{1}\!\big/_{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Για την κύρια τιμή $\sigma_{II} = 2 - \sqrt{17}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$\left(\sigma - \sigma_{II} I\right) X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\sigma_{II} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sigma_{II} & 4 \\ 1 & 4 & 2-\sigma_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{17} & 4 \\ 1 & 4 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{17}R_{21} + R_{23} \\ \sqrt{17}R_{22} + 4R_{23} \\ R_{21} + 4R_{22} + \sqrt{17}R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{17}R_{21} + R_{23} = 0 \\ \sqrt{17}R_{22} + 4R_{23} = 0 \\ R_{21} + 4R_{22} + \sqrt{17}R_{23} = 0 \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσω την πρώτη με το 4 και αφαιρέσω την 2η εξίσωση θα έχω $4R_{21} - R_{22} = 0 \Rightarrow R_{22} = 4R_{21}$
ενώ από την 1η εξίσωση έχω
$\sqrt{17}R_{21} + R_{23} = 0 \Rightarrow R_{23} = -\sqrt{17}R_{21}$

Επειδή ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$\left(R_{21}\right)^2 + \left(R_{22}\right)^2 + \left(R_{23}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(R_{21}\right)^2 + \left(4R_{21}\right)^2 + \left(\sqrt{17}R_{21}\right)^2 = 1 \Rightarrow 34\left(R_{21}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{21} = \pm\,{}^{1}\!\big/_{\sqrt{34}}\,,$$

Διαλέγουμε την θετική τιμή (αν διαλέγαμε την αρνητική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1).

Οπότε το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{21} \\ 4R_{21} \\ -\sqrt{17}R_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!\big/_{\sqrt{34}} \\ {}^{4}\!\big/_{\sqrt{34}} \\ -\,{}^{\sqrt{17}}\!\big/_{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!\big/_{\sqrt{34}} \\ {}^{4}\!\big/_{\sqrt{34}} \\ -\,{}^{1}\!\big/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Για την κύρια τιμή $\sigma_{III} = 2 + \sqrt{17}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$\left(\sigma-\sigma_{III}I\right)X_3=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2-\sigma_{III} & 0 & 1\\ 0 & 2-\sigma_{III} & 4\\ 1 & 4 & 2-\sigma_{III}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{31}\\ R_{32}\\ R_{33}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{17} & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{17} & 4\\ 1 & 4 & -\sqrt{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{31}\\ R_{32}\\ R_{33}\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{17}R_{31}+R_{33}\\ -\sqrt{17}R_{32}+4R_{33}\\ R_{31}+4R_{32}-\sqrt{17}R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{17}R_{31}+R_{33}=0\\ -\sqrt{17}R_{32}+4R_{33}=0\\ R_{31}+4R_{32}-\sqrt{17}R_{33}=0\end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσω την πρώτη με το 4 και αφαιρέσω την 2η εξίσωση θα έχω $4R_{31}-R_{32}=0\Rightarrow R_{32}=4R_{31}$
ενώ από την 1η εξίσωση έχω
$-\sqrt{17}R_{31}+R_{33}=0\Rightarrow R_{33}=\sqrt{17}R_{31}$

Επειδή ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$\left(R_{31}\right)^2+\left(R_{32}\right)^2+\left(R_{33}\right)^2=1\Rightarrow\left(R_{31}\right)^2+\left(4R_{31}\right)^2+\left(-\sqrt{17}R_{31}\right)^2=1\Rightarrow 34\left(R_{31}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow R_{31}=\pm{}^{1}\!/\!_{\sqrt{34}},$$

Διαλέγουμε την θετική τιμή (αν διαλέγαμε την αρνητική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1).

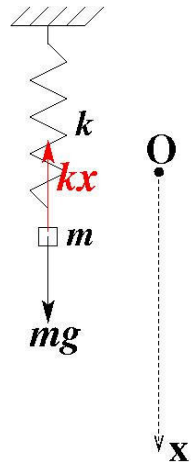
Οπότε το τρίτο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix}R_{31}\\ R_{32}\\ R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{31}\\ 4R_{31}\\ \sqrt{17}R_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{34}\\ 4/\sqrt{34}\\ \sqrt{17}/\sqrt{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{34}\\ 4/\sqrt{34}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του αναστρόφου του πίνακα στροφής και συνεπώς

$$R^T=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{21} & R_{31}\\ R_{12} & R_{22} & R_{32}\\ R_{13} & R_{23} & R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{34} & 1/\sqrt{34}\\ -1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{34} & 4/\sqrt{34}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$R=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/\sqrt{17} & -1/\sqrt{17} & 0\\ 1/\sqrt{34} & 4/\sqrt{34} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{34} & 4/\sqrt{34} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3



Στο σώμα ασκείται η δύναμη επαναφοράς από το ελατήριο και η δύναμη της βαρύτητας $F=-kx+mg$. Οι δύο δυνάμεις όπως φαίνεται στο σχήμα έχουν αντίθετη φορά. Το x είναι η απόσταση από το σημείο ισορροπίας της μάζας και ορίζεται έτσι ώστε να είναι θετική στην φορά της βαρύτητας (η μάζα όπως λέει η εκφώνηση κάνει κατακόρυφη κίνηση). Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ βρίσκεται εύκολα δεδομένου ότι $F=-kx+mg=-\frac{dV}{dx}\Rightarrow V(x)=\frac{1}{2}kx^2-mgx$.

Η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας της μάζας

$T(\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Η λαγκρανζιανή είναι $L(x,\dot{x})=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\left(\frac{1}{2}kx^2-mgx\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2+mgx$

Από την εξίσωση κίνησης θα έχω

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right)=-kx+mg\Rightarrow m\ddot{x}=-kx+mg\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}+\omega^2x=g\\ \omega=\sqrt{k/m}\end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μη-ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Για το ομογενές κομμάτι θα έχω $\ddot{x}_o+\omega^2x_o=0$ που είναι ο απλός γραμμικός ταλαντωτής συχνότητας ω και η λύση είναι $x_o(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ ή ισοδύναμα $x_o(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi)$.

Για το μη-ομογενές κομμάτι δεδομένου ότι ισούται με g που είναι σταθερά (πολυώνυμο μηδενικού βαθμού) η μερική λύση θα είναι επίσης μία σταθερά : $x_p(t)=D\Rightarrow\dot{x}_p=0\Rightarrow\ddot{x}_p=0$. Από την διαφορική εξίσωση θα έχω

$$\ddot{x}_p+\omega^2x_p=g\Rightarrow 0+\omega^2D=g\Rightarrow D=\frac{g}{\omega^2}$$

και η τελική λύση θα είναι $x(t)=x_o(t)+x_p(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)+\frac{g}{\omega^2}$ ή

$$x(t)=x_o(t)+x_p(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi)+\frac{g}{\omega^2}.$$

Αν πάρω την πρώτη σχέση θα έχω $\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)$

Από τις αρχικές συνθήκες

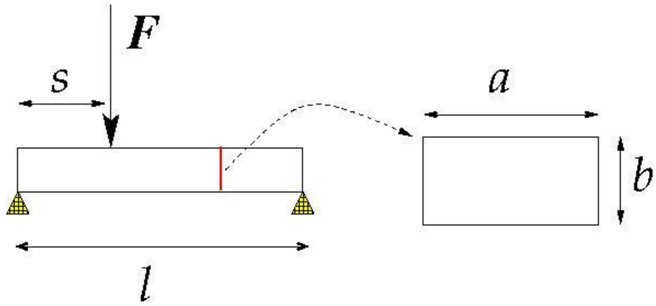
$$\begin{cases}x(t=0)=0\\ \frac{dx}{dt}(t=0)=\upsilon_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+\frac{g}{\omega^2}=0\\ \mathrm{B}\omega=\upsilon_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{g}{\omega^2}\\ \mathrm{B}=\frac{\upsilon_0}{\omega}\end{cases}\Rightarrow x(t)=-\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin(\omega t)+\frac{g}{\omega^2}$$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών | Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Νοεμβρίου 2011 | Ημερομηνία : 12-11-2011

ΘΕΜΑ 1 (2 Μ)

Δίνεται ομογενής αμφίπακτη δοκός μήκους ℓ και ορθογώνιου προφίλ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι ασκείται δύναμη $\vec{F}$ σε απόσταση s από το αριστερό της άκρο. Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της.



ΘΕΜΑ 2 (4.5 Μ)

Δίνεται γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο (π.χ. O-C-O). Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων περιγράφονται από δυναμικό της γενικής μορφής $V(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$ όπου A, B σταθερές, r η απόσταση μεταξύ των ατόμων και n,m μικροί ακέραιοι.

Α) Ποια η απόσταση ισορροπίας μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων; Για μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας τους ποια η σταθερά του ελατηρίου που τα συνδέει;

Β) Ποιοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του τριατομικού μορίου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση και τα αποτελέσματα του ερωτήματος Α; (σχολιάστε τους).

Γ) Ποια η χρονική εξάρτηση της μετατόπισης κάθε ατόμου συναρτήσει των μαζών τους και των σταθερών A, B, n, m.

ΘΕΜΑ 3 (3.5 Μ)

Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή

$$\sigma(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy & 0 & yz \\ 0 & y & z^2 \\ yz & z^2 & x \end{pmatrix}$$

Α) Στο σημείο με συντεταγμένες (1,1,1) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $2x - z = 1$; Ποιο το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης στο σημείο αυτό; Ποια η γωνία της τάσης με την ορθή τάση;

Β) Ποιες οι κύριες τιμές τάσης στο σημείο (1,1,1) και ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων; Ποιος ο αντίστοιχος πίνακας στροφής;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών | Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Φεβρουαρίου 2012 | Ημερομηνία : 04-02-2012

ΘΕΜΑ 1 (5 Μ)

Δίνεται γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο (π.χ. O-C-O). Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων περιγράφονται από δυναμικό της γενικής μορφής $V(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^{n+1}}$ όπου A, B σταθερές, r η απόσταση μεταξύ των ατόμων και n μικρός ακέραιος.

A) Ποια η απόσταση ισορροπίας μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων; Για μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας τους ποια η σταθερά του ελατηρίου που τα συνδέει;

B) Ποιοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του τριατομικού μορίου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση και τα αποτελέσματα του ερωτήματος A; (σχολιάστε τους).

ΘΕΜΑ 2 (2.5 Μ)

Έστω παραμόρφωση στερεού σώματος τέτοια ώστε κάθε σημείο (x, y, z) να μετασχηματίζεται στο (u, v, w), όπου $u = 3y - zx + x^2, v = yzx, w = x^2y^2z^2$.

(i) Ποιος ο τανυστής παραμόρφωσης;

(ii) Ποια η ορθή παραμόρφωση στο σημείο (1,0,1) κατά μήκος του διανύσματος $\vec{d} = 2\hat{u}_x - \hat{u}_y + \sqrt{20}\hat{u}_z$; Ποια η μεταβολή του μήκους στοιχειώδους τόξου και του στοιχειώδους όγκου στο σημείο αυτό;

ΘΕΜΑ 3 (2.5 Μ)

Θεωρήστε τον τανυστή παραμόρφωσης που περιγράφεται στο θέμα 2. Ποιες οι κύριες τιμές παραμόρφωσης στο σημείο (0,0,1); Ποιος ο αντίστοιχος πίνακας στροφής;

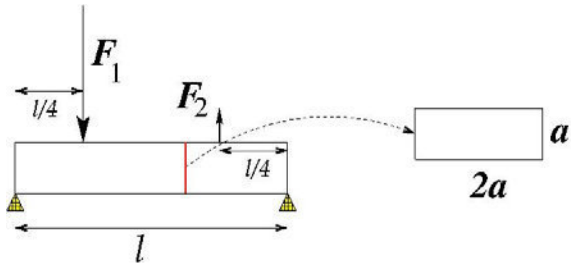
Υπόδειξη: θεωρήστε ακρίβεια δύο δεκαδικών σημείων στις πράξεις.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Ιουνίου 2012 Ημερομηνία : 22-06-2012



<u>ΘΕΜΑ 1</u> (3 Μ)

Δίνεται ομογενής αμφίπακτή δοκός μήκους ℓ και ορθογώνιου προφίλ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι ασκούνται αντιπαράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, τέτοιες ώστε $|\vec{F}_1| = 4|\vec{F}_2| = 4F$, σε απόσταση $\ell/4$ από τα δύο άκρα. Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη και η ελάχιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της συναρτήσει των F, ℓ, a.

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (2 Μ)

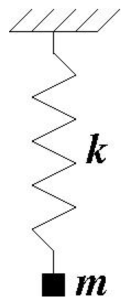
Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή $\sigma(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & xy & x \\ xy & z^2 & yx \\ x & yx & z^3 \end{pmatrix}$. Στο σημείο με συντεταγμένες (1,1,1) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $x^2 - yz = 2$;

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (3 Μ)

Δίνεται εκκρεμές μήκους ℓ και μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη αντίστασης από τον αέρα $T = 2m\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt}$. Αν θ_0 η γωνία αρχικής απόκλισης από την θέση ισορροπίας να μελετηθεί η κίνηση του για μικρές γωνίες θ. Να αναπαρασταθεί γραφικά η $\theta(t)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι $\sin\theta \approx \theta$

<u>ΘΕΜΑ 4</u> (2 Μ)



Έστω σώμα μάζας m που βρίσκεται στην άκρη ελατηρίου σταθεράς k, που έχει στερεωμένο το άνω άκρο του όπως φαίνεται στο σχήμα, και εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση υπό τη δύναμη της βαρύτητας. Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Hamilton βρείτε την χρονική εξάρτηση της μετατόπισης του από την θέση ισορροπίας αν γνωρίζετε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και έχει αρχική ταχύτητα υ_0.

Υπόδειξη: Να γράψετε τις κανονικές εξισώσεις του Hamilton και να τις επιλύσετε.

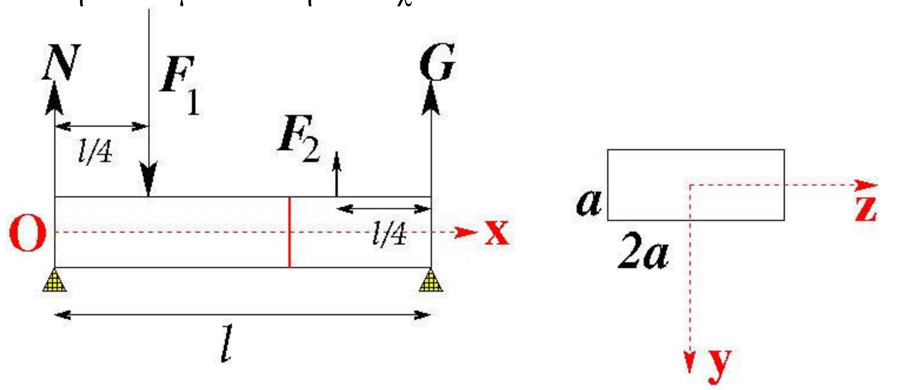
Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Στη δοκό θα ασκούνται εκτός των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και δύο δυνάμεις $\vec{N},\vec{G}$ στα δύο άκρα της που είναι πακτωμένα όπως φαίνεται στο σχήμα. Προφανώς τόσο η $\vec{N}$ όσο και η $\vec{G}$ θα έχουν φορά αντίθετη από την $\vec{F}_1$ και ομόρροπη στην $\vec{F}_2$. Αυτό θα το επαληθεύσουμε και στην συνέχεια.



Λόγω στατικής ισορροπίας πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων να ισούται με μηδέν και συνεπώς

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}=0 \Rightarrow F_1-F_2-N-G=0 \Rightarrow G+N=F_1-F_2=4F-F=3F .$$

Επίσης το άθροισμα των ροπών σε κάθε σημείο πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν λόγω στατικής ισορροπίας. Στο αριστερό πακτωμένο άκρο θα έχω

$$N\times 0-F_1\frac{\ell}{4}+F_2\frac{3\ell}{4}+G\ell=0 \Rightarrow G=F_1\frac{1}{4}-F_2\frac{3}{4}=4F\frac{1}{4}-F\frac{3}{4}=\frac{1}{4}F .$$

Συνεπώς $G+N=3F \Rightarrow N=3F-G=3F-\frac{1}{4}F=\frac{11}{4}F$.

Για να βρούμε που έχουμε την μέγιστη τάση πρέπει να βρούμε την κατανομή καταρχάς των ροπών.

Αν πάρω μία κάθετη τομή πριν το σημείο που ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$ ($x<\frac{\ell}{4}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται μόνο η δύναμη $\vec{N}$ και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι $M_z=Nx=\frac{11}{4}Fx$ και αυξάνεται με το *x* (Το *x* είναι η απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού).

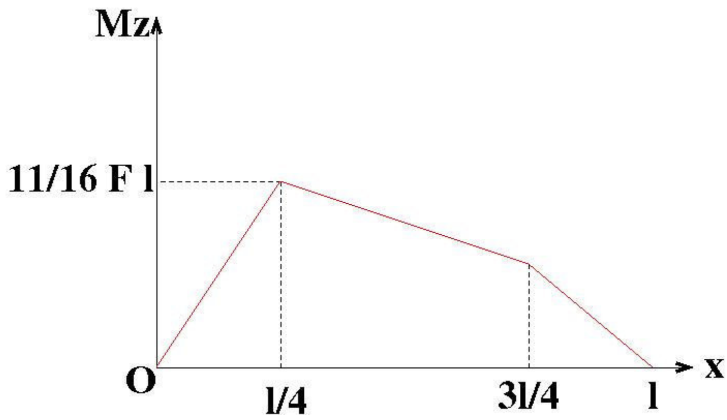
Αν τώρα η διατομή είναι ανάμεσα στα σημεία που ασκούνται οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ($\frac{\ell}{4}<x<\frac{3\ell}{4}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται η δύναμη $\vec{N}$ και η δύναμη $\vec{F}_1$, που εξασκούν ροπές αντίθετης κατεύθυνσης, και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι $M_z=Nx-F_1(x-\frac{\ell}{4})=\frac{11}{4}Fx-4F(x-\frac{\ell}{4})=-\frac{5}{4}Fx+F\ell=F(\ell-\frac{5}{4}x)$ και η ροπή μειώνεται με το *x*.

Αν τώρα η διατομή είναι ανάμεσα μετά το σημείο που ασκείται η $\vec{F}_2$ ($x > \frac{3\ell}{4}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται η δύναμη $\vec{N}$, η δύναμη $\vec{F}_1$ και η δύναμη $\vec{F}_2$, και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι

$$M_z = Nx - F_1(x-\frac{\ell}{4}) + F_2(x-\frac{3\ell}{4}) = \frac{11}{4}Fx - 4F(x-\frac{\ell}{4}) + F(x-\frac{3\ell}{4}) = -\frac{1}{4}Fx + \frac{1}{4}F\ell = \frac{1}{4}F(\ell - x)$$

και η ροπή μειώνεται με το x.

Η εξάρτηση της ροπής από την απομάκρυνση από το αριστερό άκρο της δοκού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Την μέγιστη τιμή της συνεπώς η ροπή την παίρνει όταν η διατομή βρίσκεται ακριβώς στο σημείο $\frac{\ell}{4}$ όπου ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$. Όποιον και από τους δύο τύπους να χρησιμοποιήσω για τη ροπή (είτε για $x \le \frac{\ell}{4}$ είτε για $\frac{\ell}{4} \le x \le \frac{3\ell}{4}$) στο $\frac{\ell}{4}$ θα έχω $M_z^{\max} = \frac{11F\ell}{16}$.

Εφόσον έχω ορθογώνια διατομή η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z (κοίτα σχήμα για ορισμούς συντεταγμένων) θα είναι

$$I_{zz} = \int_{-a}^{a}\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy dz = \left(\int_{-a}^{a} dz\right)\left(\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy\right) = 2a \left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=-a/2}^{y=a/2} = \frac{2a}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3\right] = \frac{a^4}{6}.$$

Η ορθή τάση για $x = \frac{\ell}{4}$ θα είναι συνεπώς

$$\sigma_{xx} = y\frac{M_z^{\max}}{I_{zz}} = y\frac{\frac{11}{16}F\ell}{\frac{a^4}{6}} = y\frac{66F\ell}{16a^4}.$$

Η μέγιστη και ελάχιστη ορθή τάση δίνεται στο κάτω και το πάνω άκρο, αντίστοιχα, όπου $y = \pm\frac{a}{2}$ και η τάση γίνεται

$$\sigma_{xx}^{\max} = y^{\max}\frac{66F\ell}{16a^4} = \frac{a}{2}\frac{66F\ell}{16a^4} = \frac{66F\ell}{32a^3}$$

$$\sigma_{xx}^{\min} = y^{\min}\frac{66F\ell}{16a^4} = -\frac{a}{2}\frac{66F\ell}{16a^4} = -\frac{66F\ell}{32a^3}$$

ΘΕΜΑ 2

Η συνάρτηση που περιγράφει το επίπεδο είναι η $f(x,y,z)=x^2-yz-2=0$.

Το κάθετο διάνυσμα θα είναι το

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z=(2x)\hat{u}_x-(z)\hat{u}_y-(y)\hat{u}_z$$

όπου $\hat{u}_x,\hat{u}_y,\hat{u}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα.

Στο σημείο (1,1,1) θα έχουμε

$$\vec{\nabla} f(1,1,1)=2\hat{u}_x-\hat{u}_y-\hat{u}_z$$

Το κάθετο μοναδιαίο στην επιφάνεια θα είναι το

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla} f(1,1,1)}{\left|\vec{\nabla} f(1,1,1)\right|}=\frac{2\hat{u}_x-\hat{u}_y-\hat{u}_z}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{2\hat{u}_x-\hat{u}_y-\hat{u}_z}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{u}_x-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{u}_y-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{u}_z.$$

Ο τανυστής τάσεων στο σημείο αυτό θα είναι επίσης

$\sigma(1,1,1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ και συνεπώς για το διάνυσμα τάσης θα έχω

$$\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Συνεπώς στο σημείο αυτό και παράλληλα στην επιφάνεια $x^2-yz=2$ δεν ασκείται τάση και $\vec{S}_{\hat{n}}=0$.

ΘΕΜΑ 3

Η εξίσωση κίνησης ενός εκκρεμούς (αυτό αποδεικνύεται εύκολα είτε με λαγκρανζιανό φορμαλισμό είτε γράφοντας τις εξισώσεις Newton και περνώντας σε πολικές συντεταγμένες) είναι

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum forces$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ασκείται η συνιστώσα της βαρύτητας και η αντίσταση λόγω τριβής. Η πρώτη είναι πάντα δύναμη επαναφοράς ενώ η δεύτερη είναι πάντα αντίθετη στην φορά κίνησης. Έστω ότι οι δυο δυνάμει είναι ομόρροπες (αν είναι αντίρροπες όταν ξαναπεράσει από το ίδιο σημείο το εκκρεμές θα γίνουν ομόρροπες)

Συνεπώς θα έχουμε

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - 2m\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Εφόσον είμαστε στο όριο των μικρών γωνιών από την υπόδειξη θα έχουμε τελικά για την εξίσωση κίνησης

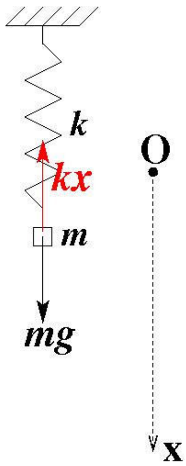
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Η εξίσωση αυτή είμαι ομογενής δευτεροτάξια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η λύση θα έχει την μορφή $\theta(t) = e^{\rho t}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $F(\rho) = \rho^2 + 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\rho + \frac{g}{\ell}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχει διακρίνουσα

$\Delta = \left(2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)^2 - 4\frac{g}{\ell} = 0$. Συνεπώς έχουμε μία διπλή ρίζα $\rho_o = \frac{-2\sqrt{\frac{g}{\ell}}}{2} = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Και η λύση θα είναι $\theta(t) = e^{-\sqrt{g/\ell}\,t}(c_1 + c_2 t)$ η οποία είναι η κρίσιμα αποσβενόμενη κίνηση στην περίπτωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με τριβή (βλέπε σελ. 7 στις σημειώσεις του μαθήματος)

ΘΕΜΑ 4



Στο σώμα ασκείται η δύναμη επαναφοράς από το ελατήριο και η δύναμη της βαρύτητας $F=-kx+mg$. Οι δύο δυνάμεις όπως φαίνεται στο σχήμα έχουν αντίθετη φορά. Το x είναι η απόσταση από το σημείο ισορροπίας της μάζας και ορίζεται έτσι ώστε να είναι θετική στην φορά της βαρύτητας (η μάζα όπως λέει η εκφώνηση κάνει κατακόρυφη κίνηση). Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ βρίσκεται εύκολα δεδομένου ότι $F=-kx+mg=-\frac{dV}{dx}\Rightarrow V(x)=\frac{1}{2}kx^2-mgx$.

Η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας της μάζας

$$T(\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Η Χαμιλτονιανή είναι $H=T+V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\left(\frac{1}{2}kx^2-mgx\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx$

Επειδή η Χαμιλτονιανή είναι συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων και ορμών και όχι των γενικευμένων ταχυτήτων όπως η Λαγκανζιανή θα χρησιμοποιήσω την τελευταία για να μετασχηματίσω τη Χαμιλτοναινή συναρτήσει των σωστών ορισμάτων

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\left(\frac{1}{2}kx^2-mgx\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2+mgx$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

Συνεπώς $H(x,p_x)=\frac{p_x{}^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2-mgx$ Οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton θα είναι

$$\begin{cases}\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx+mg\\ \dot{q}_x=\ddot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}\end{cases}\Rightarrow m\ddot{x}=-kx+mg\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}+\omega^2x=g\\ \omega=\sqrt{k/m}\end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μη-ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για το ομογενές κομμάτι θα έχω $\ddot{x}_o+\omega^2x_o=0$ που είναι ο απλός γραμμικός ταλαντωτής συχνότητας ω και η λύση είναι $x_o(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ ή ισοδύναμα $x_o(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi)$.

Για το μη-ομογενές κομμάτι δεδομένου ότι ισούται με g που είναι σταθερά (πολυώνυμο μηδενικού βαθμού) η μερική λύση θα είναι επίσης μία σταθερά : $x_p(t)=D\Rightarrow\dot{x}_p=0\Rightarrow\ddot{x}_p=0$. Από την διαφορική εξίσωση θα έχω

$$\ddot{x}_p+\omega^2x_p=g\Rightarrow 0+\omega^2D=g\Rightarrow D=\frac{g}{\omega^2}$$

και η τελική λύση θα είναι $x(t)=x_o(t)+x_p(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)+\frac{g}{\omega^2}$

Αν πάρω την πρώτη σχέση θα έχω $\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)$

Από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases}x(t=0)=0\\ \frac{dx}{dt}(t=0)=\upsilon_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+\frac{g}{\omega^2}=0\\ \mathrm{B}\omega=\upsilon_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{g}{\omega^2}\\ \mathrm{B}=\frac{\upsilon_0}{\omega}\end{cases}\Rightarrow x(t)=-\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin(\omega t)+\frac{g}{\omega^2}$$

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών — Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2012 — Ημερομηνία : 21-09-2012

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Έστω παραμόρφωση στερεού σώματος τέτοια ώστε κάθε σημείο (x, y, z) να μετασχηματίζεται στο (u, v, w), όπου $u = y - zx, v = yx\sin(y\pi), w = y^2z^2\cos(x\pi)$.

(i) Ποιος ο τανυστής παραμόρφωσης;

(ii) Ποια η ορθή παραμόρφωση στο σημείο (2,2,1) κατά μήκος του διανύσματος $\vec{d} = \hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z$;

(iii) Ποια η μεταβολή του μήκους στοιχειώδους τόξου και του στοιχειώδους όγκου στο σημείο αυτό; Κατά την κρίση σας, πόσο πιθανή θεωρείται μία αστοχία του υλικού;

(iv) Ποιες οι κύριες τιμές του τανυστή παραμόρφωσης στο σημείο αυτό;

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται ομογενής αμφίπακτη δοκός μήκους ℓ και κυκλικού προφίλ ακτίνας a. Έστω ότι ασκούνται ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, ίσου μέτρου F, σε απόσταση s_1 και s_2 από το αριστερό και το δεξί άκρο της δοκού αντίστοιχα (θεωρήστε ότι τα s_1 και s_2 είναι μικρότερα του $\ell/4$). Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη και η ελάχιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της.

Υπόδειξη 1: Ξεχωρίστε τις περιπτώσεις $s_1 = s_2, s_1 < s_2, s_1 > s_2$.

Υπόδειξη 2: Δίνεται $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Έστω απλός αποσβενούμενος αρμονικός ταλαντωτής μάζας m, σταθεράς ελατηρίου k και συντελεστή τριβής γ. Αν σε αυτόν ασκείται εξωτερική περιοδική δύναμη ημιτονοειδούς μορφής $F = F_o\sin(\omega_0 t)$, να μελετηθεί το φαινόμενο συντονισμού της χρονικής μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας για μεγάλους χρόνους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

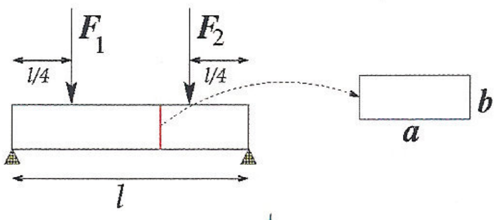
Καλή Επιτυχία

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών — Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Επί Πτυχίω 2013 — Ημερομηνία : 13-02-2013

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (3 Μ)

Δίνεται ομογενής αμφίπακτή δοκός μήκους ℓ και ορθογώνιου προφίλ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι ασκούνται δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, ίσου μέτρου F, σε απόσταση $\ell/4$ από τα δύο άκρα. Σε ποια σημεία της δοκού ασκείται η μέγιστη ορθή τάση και ποια η τιμής της.



<u>ΘΕΜΑ 2</u> (3.5 Μ)

Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή

$$\sigma(x,y,z)=\begin{pmatrix} xy & 0 & yz \\ 0 & y & z^2 \\ yz & z^2 & x \end{pmatrix}$$

Α) Στο σημείο με συντεταγμένες (1,1,1) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $2x-z=1$; Ποιο το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης στο σημείο αυτό; Ποια η γωνία της τάσης με την ορθή τάση;

Β) Ποιες οι κύριες τιμές τάσης στο σημείο (1,1,1) και ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων; Ποιος ο αντίστοιχος πίνακας στροφής;

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (3.5 Μ)

Έστω απλός αποσβενούμενος αρμονικός ταλαντωτής μάζας m, σταθεράς ελατηρίου k και συντελεστή τριβής γ. Αν σε αυτόν ασκείται εξωτερική περιοδική δύναμη ημιτονοειδούς μορφής $F=F_o\sin(\omega_0 t)$, να μελετηθεί το φαινόμενο συντονισμού της χρονικής μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας για μεγάλους χρόνους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών | Ειδικά Θέματα Μηχανικής

Εξεταστική Εαρινού Εξαμήνου 2013 | Ημερομηνία : 01-07-2013

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (2.5 Μ)

Έστω στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται τάσεις που περιγράφονται από τον τανυστή

$$\sigma(x,y,z)=\begin{pmatrix} xy & -1 & ye^{z} \\ -1 & y & xe^{-z} \\ ye^{z} & xe^{-z} & -e^{z} \end{pmatrix}$$

Στο σημείο με συντεταγμένες (1,1,0) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο $\sin(x\pi)-\pi ye^{z}=1$; Ποιο το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης στο σημείο αυτό;

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (2.5 Μ)

Δίνεται εκκρεμές μήκους ℓ και μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη αντίστασης από τον αέρα $T=2m\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt}$ όπου θ η γωνία που σχηματίζει το νήμα του εκκρεμούς με την κατακόρυφο. Αν θ_0 η γωνία αρχικής απόκλισης από την θέση ισορροπίας να μελετηθεί η κίνηση του για μικρές γωνίες θ. Να αναπαρασταθεί γραφικά η $\theta(t)$.
Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι $\sin\theta \approx \theta$

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (2.5 Μ)

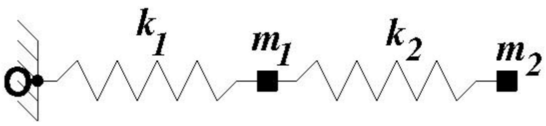
Έστω παραμόρφωση στερεού σώματος τέτοια ώστε κάθε σημείο (x,y,z) να μετασχηματίζεται στο (u,v,w), όπου $u=yx, v=z\cos(x\pi)-y, w=2xye^{z}$.

(i) Ποιος ο τανυστής παραμόρφωσης;

(ii) Ποια η ορθή παραμόρφωση στο σημείο (1,1,0) κατά μήκος του διανύσματος $\vec{d}=\hat{u}_x-\hat{u}_y+\hat{u}_z$;

(iii) Ποια η μεταβολή του μήκους στοιχειώδους τόξου και του στοιχειώδους όγκου στο σημείο αυτό; Κατά την κρίση σας, πόσο πιθανή θεωρείται μία αστοχία του υλικού;

<u>ΘΕΜΑ 4</u> (2.5 Μ)



Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένα με δύο ελατήρια σταθερών k_1 και k_2. Μπορούν δε να κινηθούν μόνο κατά την ευθεία που τα ενώνει με το σταθερό σημείο Ο. Να γραφτεί η συνάρτηση Lagrange καθώς και οι εξισώσεις Lagrange που περιγράφουν την κίνηση. Ποιοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (βρείτε τις ιδιοσυχνότητες);

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Η συνάρτηση που περιγράφει το επίπεδο είναι η $f(x,y,z)=\sin(x\pi)-\pi y e^{z}-1=0$.
Το κάθετο διάνυσμα θα είναι το

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z=\pi\cos(x\pi)\hat{u}_x-\pi e^{z}\hat{u}_y-\pi y e^{z}\hat{u}_z$$

όπου $\hat{u}_x,\hat{u}_y,\hat{u}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα.
Στο σημείο (1,1,0) θα έχουμε

$$\vec{\nabla} f(1,1,0)=-\pi\hat{u}_x-\pi\hat{u}_y-\pi\hat{u}_z=-\pi(\hat{u}_x+\hat{u}_y+\hat{u}_z)$$

Το κάθετο μοναδιαίο στην επιφάνεια θα είναι το

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla} f(1,1,0)}{\left|\vec{\nabla} f(1,1,0)\right|}=\frac{-\hat{u}_x-\hat{u}_y-\hat{u}_z}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{-\hat{u}_x-\hat{u}_y-\hat{u}_z}{\sqrt{3}}.$$

Ο τανυστής τάσεων στο σημείο αυτό θα είναι επίσης

$$\sigma(1,1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ και συνεπώς για το διάνυσμα τάσης θα έχω

$$\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

και θα είναι το

$$\vec{S}_{\hat{n}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_x-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_y-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_z.$$

Για το μέτρο της ορθής και της διατμητικής τάσης θα έχω

$$|\vec{\sigma}_{\hat{n}}|=\vec{S}_{\hat{n}}\hat{n}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_x-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_y-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_z\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_x-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_y-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{u}_z\right)=1$$

$$\left|\vec{S}_{\hat{n}}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$$

$$|\vec{\tau}_{\hat{n}}|=\sqrt{\left|\vec{S}_{\hat{n}}\right|^2-|\vec{\sigma}_{\hat{n}}|^2}=0$$

ΘΕΜΑ 2

Η εξίσωση κίνησης ενός εκκρεμούς (αυτό αποδεικνύεται εύκολα είτε με λαγκρανζιανό φορμαλισμό είτε γράφοντας τις εξισώσεις Newton και περνώντας σε πολικές συντεταγμένες) είναι

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=\sum forces$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ασκείται η συνιστώσα της βαρύτητας και η αντίσταση λόγω τριβής. Η πρώτη είναι πάντα δύναμη επαναφοράς ενώ η δεύτερη είναι πάντα αντίθετη στην φορά κίνησης. Έστω ότι οι δυο δυνάμει είναι ομόρροπες (αν είναι αντίρροπες όταν ξαναπεράσει από το ίδιο σημείο το εκκρεμές θα γίνουν ομόρροπες)

Συνεπώς θα έχουμε

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta-2m\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

Εφόσον είμαστε στο όριο των μικρών γωνιών από την υπόδειξη θα έχουμε τελικά για την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

Η εξίσωση αυτή είμαι ομογενής δευτεροτάξια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η λύση θα έχει την μορφή $\theta(t)=e^{\rho t}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $F(\rho)=\rho^2+2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\rho+\frac{g}{\ell}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχει διακρίνουσα

$\Delta=\left(2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)^2-4\frac{g}{\ell}=0$. Συνεπώς έχουμε μία διπλή ρίζα $\rho_o=\dfrac{-2\sqrt{\frac{g}{\ell}}}{2}=-\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Και η λύση θα είναι $\theta(t)=e^{-\sqrt{g/\ell}\,t}(c_1+c_2t)$ η οποία είναι η κρίσιμα αποσβενόμενη κίνηση στην περίπτωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με τριβή (βλέπε σελ. 7 στις σημειώσεις του μαθήματος)

ΘΕΜΑ 3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

i) Οι μερικές παράγωγοι είναι $\frac{\partial v}{\partial x} = -z\pi \sin(x\pi) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \cos(x\pi)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2ye^{z} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xe^{z} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 2xye^{z}$$

Ο τανυστής παραμόρφωσης είναι

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$ όπου $$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$ και

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

ii) Στο σημείο (1,1,0) θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \cos(\pi) = -1$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2*1*e^{0} = 2 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2*1*e^{0} = 2 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2*1*1*e^{0} = 2$$

και συνεπώς $\varepsilon(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Το μοναδιαίο στην διεύθυνση $\vec{d}$ είναι $\hat{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{\hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z\right)$

Η ορθή παραμόρφωση είναι

$$\varepsilon_{\hat{n}} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} \varepsilon_{ij} n_i n_j = \varepsilon_{xx} n_x n_x + \varepsilon_{xy} n_x n_y + \varepsilon_{xz} n_x n_z + \varepsilon_{yx} n_y n_x + \varepsilon_{yy} n_y n_y + \varepsilon_{yz} n_y n_z + \varepsilon_{zx} n_z n_x + \varepsilon_{zy} n_z n_y + \varepsilon_{zz} n_z n_z$$

$$= 1\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

iii) Για το θεμελιώδες τόξο θα έχουμε

$$\varepsilon_{\hat{n}} = \frac{\delta s - \delta s_0}{\delta s_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\delta s}{\delta s_0} - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\delta s}{\delta s_0} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Για την μεταβολή του θεμελιώδη όγκου θα έχουμε

$$Tr(\varepsilon) = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} \Rightarrow \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} \Rightarrow 1 - 1 + 2 = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta V}{\delta V_0} = 3$$

Η μεταβολή του όγκου είναι τεράστια και προφανώς το υλικό δεν μπορεί να παραμορφωθεί τόσο πολύ σε εκείνο το σημείο και θα υποστεί αστοχία.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι η απομάκρυνση της πρώτης μάζας από τη θέση ισορροπίας είναι x_1 και της δεύτερης από την δικιά της θέσης ισορροπίας x_2.

Η κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα των ταχυτήτων των δύο μαζών

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2\right)^2$$

Για την δυναμική ενέργεια αρκεί να πάρουμε την δυναμική ενέργεια λόγω της παραμόρφωσης των ελατηρίων. (Η βαρύτητα δεν παίζει κανένα ρόλο εφόσον τα σώματα κινούνται κατά μηκος της οριζόνται ευθείας). Το πρώτο ελατήριο παραμορφώνεται κατά x_1 ενώ το δεύτερο κατά $x_1 - x_2$, θεωρώντας ότι οι δύο μάζες κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια και η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι

$$V = \frac{1}{2}k_1\left(x_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2\right)^2 - \frac{1}{2}k_1\left(x_1\right)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2$$

Οι εξισώσεις Lagrange που περιγράφουν την κίνηση των δύο μαζών είναι

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1\right) = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ \frac{d}{dt}\left(m_2\dot{x}_2\right) = k_2(x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2(x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{X} = KX$$

όπου

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

Για να βρω τις δύο ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης πρέπει να βρω που μηδενίζεται η ορίζουσα

$$\left|K - \omega^2 I\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2 & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$